

МАЙ/ИЮНЬ

ISSN 0130-2221

2014 • № 3

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

# КУБИК, ДА НЕ РУБИК



В этой головоломке Ясухиро Хасимото (*Yasuhiro Hashimoto*) требуется сложить три одинаковые детали так, чтобы они поместились в кубе. Каждая деталь состоит из семи одинаковых кубиков; на фотографии видно, как эти кубики склеены друг с другом. Решая эту головоломку, легко напасть на «ложный след», и может показаться, что в ней просят сделать невозможное. Но решение есть. Оно изящное и обладает немного необычной симметрией – пусть это послужит маленькой подсказкой. Желаем успехов!

*Е. Епифанов*

## В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ Российская академия наук	2 Реконструкция генома: головоломка из миллиарда кусочков. <i>Ф.Компо, П.Певзнер</i>
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР <b>А.Л.Семенов</b>	13 Очерк истории исследований нейтрино (окончание). <i>Ю.Гапонов</i>
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ Н.Н.Андреев, А.Я.Белов, К.Ю.Богданов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, С.Д.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, Н.П.Долбиллин, С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.А.Заславский, П.А.Кожевников ( <i>заместитель главного редактора</i> ), С.П.Коновалов, А.А.Леонovich, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, В.Ю.Протасов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан ( <i>заместитель главного редактора</i> )	ЗАДАЧНИК «КВАНТА» 19 Задачи М2341–М2348, Ф2348–Ф2354 21 Решения задач М2326–М2333, Ф2333–Ф2339
РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев	«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ 27 Задачи 28 Электромагнитное излучение на пальцах. <i>В.Сыщенко</i>
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР <b>И.К.Кикоин</b> ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА <b>А.Н.Колмогоров</b> Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер	ШКОЛА В «КВАНТЕ» 31 Сверхзвуковые автобусы, лодки и... деревья. <i>Е.Соколов</i> 36 Сиреневый туман... <i>А.Стасенко</i>
	КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА» 32 Силы инерции
	НАША ОБЛОЖКА 37 Как Архимед взвесил параболу?
	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК 38 Еще раз о точке Торричелли. <i>Л.Радзивиловский</i> 42 Снова о рыцарях и лжецах. <i>Л.Бойко, М.Бойко</i>
	ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА 45 Пары. Влажность. <i>А.Черноуцан</i>
	ИНФОРМАЦИЯ 49 Заочная школа СУНЦ НГУ
	ОЛИМПИАДЫ 52 XXII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон» 56 Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2014 года
	57 Ответы, указания, решения
	НА ОБЛОЖКЕ I <i>Иллюстрация к статье Ю.Гапонова</i> II <i>Коллекция головоломок</i> III <i>Шахматная страничка</i> IV <i>Прогулки с физикой</i>

# Реконструкция генома: головаломка из миллиарда кусочков

Ф.КОМПО, П.ПЕВЗНЕР

**С**ОВРЕМЕННАЯ БИОЛОГИЯ ЕЩЕ НЕ НАУЧИЛАСЬ читать последовательности нуклеотидов в больших молекулах ДНК букву за буквой. Вместо этого ученые расшифровывают последовательности коротких (длиной примерно 100–300 нуклеотидов) кусочков ДНК, называемых *ридами*, не имея ни малейшего представления, из какого места генома был вырезан каждый кусочек. Процесс сборки генома из таких ридов, называемый по-научному *секвенированием* ДНК, сродни попытке собрать головоломку из миллиарда кусочков. Это серьезная математическая задача, и мы расскажем увлекательную историю ее математического и биологического аспектов.

## Секвенирование ДНК – введение

### Секвенирование ДНК и задача о перекрывающихся кусочках

Представьте, что целый тираж какой-то газеты лежал в одном ящике, а потом этот ящик взорвался. Допустим, что газеты не сгорели, как это случилось бы в реальной жизни, а разлетелись на маленькие кусочки наподобие конфетти (рис.1). Естественный вопрос:

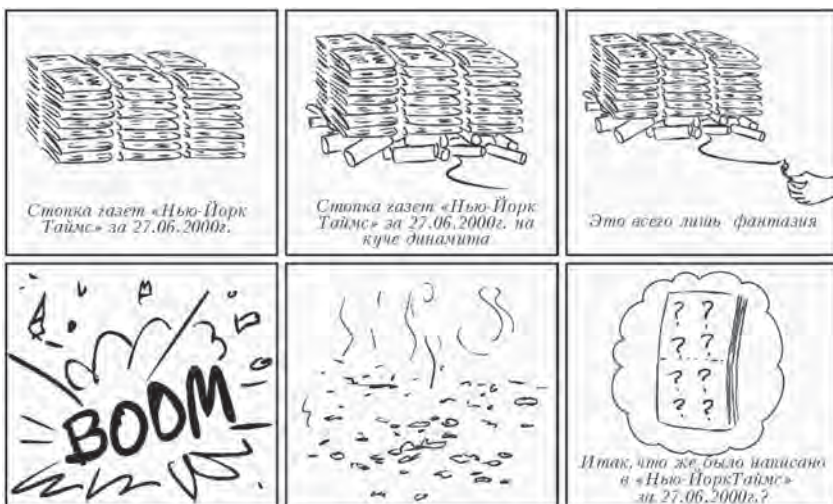


Рис.1. После взрыва ящика с газетами от них останется лишь куча обрывков. Можно ли по ним восстановить содержание газеты?

можно ли по этим обрывкам восстановить то, что было написано в газете?

Задача интереснее, чем может показаться на первый взгляд, – она не сводится лишь к склеиванию обрывков друг с другом, как будто это были кусочки пазла. Во-первых, мы вполне могли потерять часть обрывков. Во-вторых, в сундуке было много экземпляров газеты, и поэтому какие-то обрывки могут перекрываться между собой и содержать куски одних и тех же фраз. Таким образом, задачу о восстановлении газеты можно назвать задачей о перекрывающихся кусочках.

Хоть наша аналогия с обрывками газет несколько притянута за уши, задача восстановления текста газеты по своей сути аналогична задаче сборки ДНК из фрагментов.

Напомним, что ДНК можно представлять себе как цепочку из звеньев (нуклеотидов) четырех типов, обозначаемых буквами А, Т, Г и Ц. К сожалению, технология, которая позволила бы нам читать целый геном последовательно, нуклеотид за нуклеотидом, еще не придумана. Тем не менее, ученые научились определять последовательность нуклеотидов в коротких кусочках ДНК. На данный момент самые распространенные технологии имеют дело с ридами длиной всего лишь 100–300 нуклеотидов (рис.2).

Прочитывается множество ридов из нескольких копий одного генома, и получается гигантский пазл (в котором кусочки могут перекрываться). Например, геном млекопитающего длиной в 3 миллиарда нуклеотидов потребует сборки пазла из миллиарда кусочков – кажется, это рекорд для головоломок такого рода.

Много копий одного генома

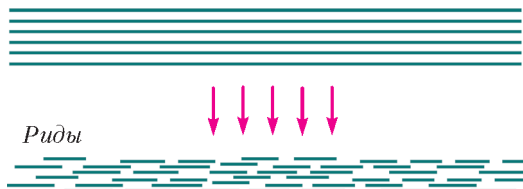


Рис.2. При секвенировании ДНК многочисленные (обычно их больше миллиарда) копии этой молекулы «рвутся» в случайных местах, чтобы получились гораздо более короткие риды

Таким образом, задача секвенирования генома сводится к чтению (т.е. определению последовательности) ридов (биологическая часть) и сборке фрагментов (математическая часть). Первая задача ведет свою долгую и запутанную историю с 70-х годов, когда Уолтер Гилберт (Walter Gilbert) и Фред Сэнгер (Fred Sanger) получили Нобелевскую премию за изобретение первого метода чтения ридов. В начале 1990-х на рынке появились современные секвенаторы (машины для определения кусочков последовательности ДНК), и с этого момента для задачи секвенирования началась новая эра. В 2000 году несколько сотен таких машин, работая без остановки более года, прочитали достаточно большое число ридов, чтобы удалось возможно определить последовательность генома человека. Сборка этого генома потребовала нескольких месяцев работы одних из самых производительных суперкомпьютеров того времени.

### Сложности сборки фрагментов

Чуть позже мы достаточно подробно расскажем о том, как читают риды, а пока остановимся на вычислительной задаче *сборки фрагментов* – как, используя полученные риды, определить последовательность всего генома.

Хотя и восстановление газеты, и сборка фрагментов сводятся к складыванию пазла, задача сборки значительно сложнее, и не только из-за своего гигантского масштаба (напомним, что нам может потребоваться обработать миллиард ридов). Во-первых, газета написана на некотором понятном языке. Его правила будут подсказывать нам, могут ли какие-то два отрывка находиться рядом, вне зависимости от того, перекрываются они или нет (рис.3,а). В то же время правила «языка» ДНК по большей части неизвестны биологам, и исходя из одной только последовательности практически невозможно понять, могут ли два непересекающихся рида располагаться близко или далеко друг от друга.

Вторая сложность сборки фрагментов состоит в том, что алфавит последовательностей ДНК состоит всего из 4 букв: А, Т, Г и Ц. Работа с маленьким алфавитом усложняет восстановление исходной последовательности, поскольку большее количество пересечений будет вызвано случайными причинами (рис.3,б).

В-третьих, любая последовательность ДНК содержит множество «консервативных участков» – нуклеотидных «слов», которые повторяются много раз подряд практически без изменений. Например, в геноме человека последовательность так называемого *Alu*-повтора (длиной примерно 300 нуклеотидов) встречается свыше миллиона раз, причем в каждом вхождении изменены всего несколько нуклеотидов. Поэтому для

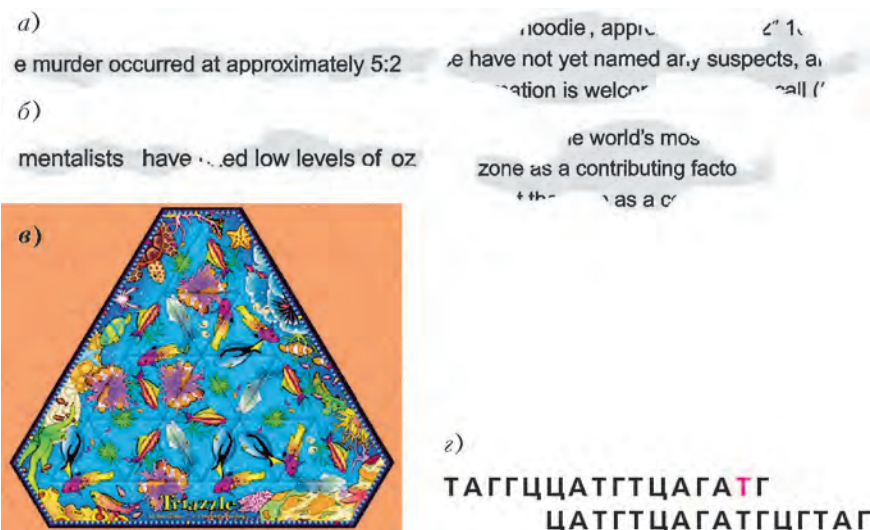


Рис.3. а) При восстановлении газеты помогают логические связи между словами: хотя эти два обрывка и не пересекаются, можно предположить, что они должны быть расположены близко друг к другу, потому что слова «murder» («убийство») и «suspect» («подозреваемый») связаны по смыслу.

б) В этом случае кусочки «oz» и «zone» скорее всего являются частями слова «ozone» («озон»), и можно эти два обрывка склеить, даже несмотря на то, что они пересекаются всего по одной букве. В задаче секвенирования ДНК, где в алфавите всего 4 буквы, таких подсказок не будет – правила этого «языка» нам пока почти не известны.

в) Повторяющиеся фрагменты усложняют задачу, как видно на примере головоломки «Triazzle», в которой каждая рыбка встречается не меньше трех раз.

г) Секвенаторы ДНК не идеальны: здесь красный нуклеотид «Т» был определен неправильно, и на самом деле на его месте должен быть «Ц». Ошибка всего в одном нуклеотиде может привести к тому, что мы будем считать два рида пересекающимися, хотя на самом деле они таковыми не являются

конкретного фрагмента бывает трудно определить, в каком именно консервативном участке генома он находится. Подходящей иллюстрацией этого затруднения может быть популярная когда-то в США головоломка «Triazzle». Хотя по сути это обычный пазл всего из 16 кусочков, исходное изображение содержит много одинаковых фигурок, повторяющихся на многих кусочках, из-за чего собрать «Triazzle» существенно сложнее, чем обычный пазл (рис.3,в)

Наконец, современные секвенаторы далеко не совершенны, и считаваемые ими риды содержат много ошибок. Поэтому, например, два рида, находившиеся в геноме далеко друг от друга, могут быть в результате ошибки интерпретированы как пересекающиеся (рис.3,г).

Теперь, когда мы выяснили, какие трудности связаны с процессом секвенирования ДНК, можно рассказать о математическом аппарате, с помощью которого можно подойти к задаче сборки фрагментов.

## Математика секвенирования ДНК

### Исторический экскурс

Перед тем как перейти непосредственно к математике, давайте немного отвлечемся, чтобы лучше представить исторический контекст. Начнем с XVIII века и прусского города Кенигсберга (в настоящее время –

Калиниград). Кенигсберг располагался тогда на двух берегах реки Преголи и двух ее островах. Эти четыре части города соединялись между собой семью мостами (рис.4,а). Жители Кенигсберга любили прогуливаться, и им стало любопытно: можно ли пройти по каждому из семи мостов ровно один раз и вернуться после этого в исходную точку? Этот вопрос стали называть «задачей о Кенигсберских мостах». Окончательный ответ на него дал в 1736 году великий математик Леонард Эйлер (его портрет приведен на рисунке 14). Решение Эйлера, которое мы обсудим чуть ниже, очень любопытно, потому что его можно применить не только к мостам Кенигсберга, но и к любой другой сети мостов.

Вторая история случилась в Дублине, где в 1857 году ирландский математик Уильям Гамильтон (его портрет приведен на рисунке 14) изобрел «Икосаэдрическую<sup>1</sup> игру». Эта «игра», наслаждаться которой довольно непросто даже по современным меркам, состояла из деревянной доски с 20 лунками, некоторые из которых были соединены между собой линиями, и 20 пронумерованных фишек, которые можно было вставлять в эти лунки (рис.5,а). Цель игры заключалась в следующем:



Рис.4. а) Старый Кенигсберг, иллюстрация Йохима Беринга, 1613 г. б) «Граф мостов Кенигсберга», который получается, если сжать каждый остров в точку, а мосты изобразить линиями



Рис.5. а) «Икосаэдрическая игра». б) Соответствующий граф

расставить фишки по лункам так, чтобы фишка 1 была соединена на доске линией с фишкой 2, та, в свою очередь, соединялась с фишкой 3, и так далее вплоть до фишки 20, которая должна быть связана с фиш-

кой 1. Другими словами, если бы мы шли по линиям от фишки к фишке в порядке возрастания номеров, то мы побывали бы у каждой фишки ровно один раз и в конце вернулись бы к исходной.

## Графы

Закончив с историческим экскурсом, перейдем к определениям. Назовем *графом* набор *вершин*, соединенных *ребрами*, где каждое ребро связывает две вершины. Абстрактность этого определения может несколько отпугнуть, поэтому поясним, что граф всегда можно представлять себе как карту дорожной сети, где города – это вершины, а дороги, их соединяющие, – ребра.

*Теория графов* (область математики, занимающаяся изучением графов) применима ко многим типам задач. Приложения этой теории включают в себя не только дорожные и телефонные или компьютерные сети, но и менее очевидные примеры, такие как изучение распространения эпидемий или моделирование ссылок между веб-страницами в интернете.

В частности, мы можем применить теорию графов и к двум нашим историческим задачам. В задаче о Кенигсберских мостах мы получим граф  $K$ , если сопоставим каждой из четырех частей города по вершине, а затем проведем между двумя такими вершинами по одному ребру для каждого моста, который связывает две соответствующие части города (рис.4,б). А для «Икосаэдрической игры» мы построим граф  $I$ , сопоставив каждой лунке вершину и превратив соединяющие их линии в соответствующие ребра (рис.5,б).

## Эйлеровы и гамильтоновы циклы

Теперь мы обобщим две наши исторические задачи на все возможные графы. Предположим, что у нас есть некий граф, который мы обозначим  $G$ , и представим, что на какой-то вершине в  $G$  сидит муравей. Так же, как жители Кенигсберга, ходившие по мостам между разными частями города, муравей может ползать по ребрам от вершины к вершине. Если муравей вернулся туда, откуда начал, результатом его прогулки будет *цикл* на  $G$ . Мы зададимся двумя вопросами о циклах на  $G$ :

1. Существует ли цикл на  $G$ , при котором муравей проползет по каждому ребру в точности один раз?
2. Существует ли цикл на  $G$ , при котором муравей побывает в каждой вершине ровно один раз?

Первый вопрос называется *Задачей эйлера цикла* (ЗЭЦ) – заметьте, что решение ЗЭЦ в том случае, когда нашим графом является  $K$ , соответствует решению задачи о Кенигсберских мостах. Поэтому мы определим *эйлеров цикл* на графе  $G$  как цикл на  $G$ ,

<sup>1</sup> Интересно, что хоть игра и называется икосаэдрической, в действительности в ней приходится совершать обход ребер додекаэдра.

который проходит по каждому ребру в  $G$  ровно один раз.

Второй вопрос называется *Задачей гамильтонова цикла* (ЗГЦ), потому что выигрыш в гамильтоновой «Икосаэдрической игре» будет по сути решением ЗГЦ для графа  $I$  (рис.6). Аналогично, *гамильтонов цикл* в графе  $G$  – это цикл на  $G$ , который проходит через каждую вершину один и только один раз.

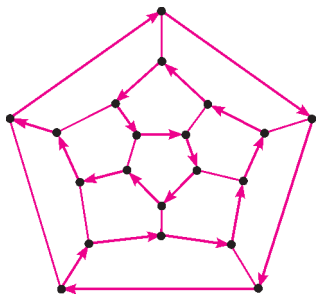


Рис.6. Пример гамильтонова цикла в «Икосаэдрической игре»

Наконец мы определим *связный граф* как такой, в котором муравей, начав движение на произвольной вершине, может достигнуть любой другой вершины по ребрам графа. Для наших целей имеет смысл изучать

ЗЭЦ и ЗГЦ только для связных графов. Ведь граф, не являющийся связным, автоматически не содержит ни эйлерова, ни гамильтонова цикла. Поэтому в этом разделе каждый граф будет подразумеваться связным.

### Теорема Эйлера

Переход от конкретных исторических примеров к общим вопросам о произвольных графах очень поможет нам в дальнейшем изложении. Хотя ЗЭЦ и ЗГЦ на первый взгляд кажутся похожими, специалисты в области теории алгоритмов вскоре обнаружили, что у них совершенно разные алгоритмические свойства: ЗЭЦ может быть быстро решена даже для огромных графов, в то время как эффективный алгоритм для решения ЗГЦ для больших графов остается неизвестным и, может быть, вовсе не существует.

Для начала мы обсудим ЗЭЦ. Как мы уже упоминали, решение задачи о Кенигберских мостах обобщается на произвольную сеть из мостов. Под этим мы имели в виду, что решение Эйлера содержит простое условие разрешимости ЗЭЦ для произвольного графа.

Перед тем как изложить результат Эйлера, нам понадобится одно определение. Назовем *степенью* вершины  $v$  графа  $G$  число ребер, соединяющих  $v$  с другими вершинами  $G$ . Например, для Кенигберского графа  $K$  на рисунке 4,6 верхняя, нижняя и правая вершины имеют степень 3, а у левой вершины, обозначающей основной остров Кенигсберга, степень равна 5. Таким образом, степень вершины  $v$  графа  $K$  равна числу мостов соединяющих соответствующую этой вершине часть города с другими районами.

**Первая теорема Эйлера.** *Наличие у графа  $G$  эйлерова цикла равносильно тому, что степень каждой вершины графа  $G$  четна (напомним, что граф предполагается связным).*

Как понимать то, что два утверждения равносильны? Это значит, что если одно утверждение верно, то и другое обязательно тоже верно, и наоборот. Равносильность утверждений о степенях вершин и существовании эйлерова цикла является очень мощным результатом, потому что с его помощью для любого графа  $G$  мы сможем определить, есть ли у  $G$  эйлеров цикл, *не перебирая все циклы*. Вместо этого достаточно будет проверить степень каждой вершины, а это довольно легкая вычислительная задача даже для большого графа.

Заметим, что применение теоремы Эйлера немедленно дает решение задачи о Кенигберских мостах. Мы уже показали выше, что не у каждой вершины  $K$  четная степень. Поэтому  $K$  не содержит эйлерова цикла, и маршрут, о котором мечтали граждане Кенигсберга, не существует.

С XVII века в планировке Кенигсберга многое изменилось, но оказывается, что аналогичный граф, нарисованный для современного города Калининграда, тоже не содержит эйлерова цикла (рис.7); однако, теперь в этом графе есть *эйлеров путь*, что означает, что обитатель Калининграда может пройти по каждому мосту в точности один раз, но не может при этом вернуться туда, откуда начал. Таким образом, жители Калининграда наконец-то достигли, по крайней мере, частично, цели жителей Кенигсберга. Правда, сейчас

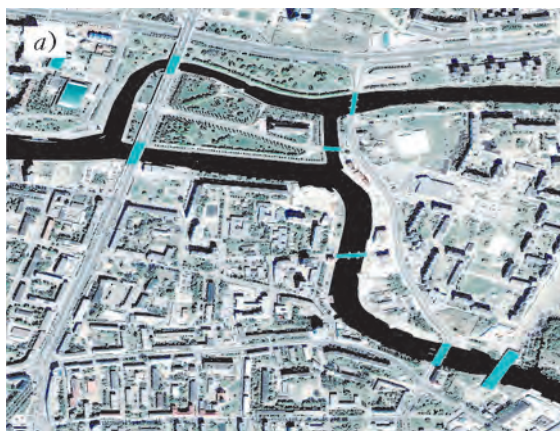


Рис.7. а) Спутниковая фотография современного Калининграда; мосты выделены голубым цветом.

б) «Граф мостов Калининграда». Любопытный вопрос: где нужно построить новые мосты, чтобы в получившемся графе был эйлеров цикл?

прогуливаться по Калининграду далеко не так приятно, как это было в 1735, поскольку старый Кенигсберг был сильно разрушен английской бомбардировкой в 1944 и практически полностью перестроен.

### Теорема Эйлера для ориентированных графов

Чтобы применить теорему Эйлера для нашей задачи сборки фрагментов, нам понадобится слегка изменить ее утверждение. Вначале предположим, что у нас есть *ориентированный граф*, т.е. граф, в котором у каждого ребра задано направление: ребро, выходящее из  $v$  к  $w$ , отличается от ребра, выходящего из  $w$  к  $v$ . Можно представлять себе ориентированный граф как схему

улиц с односторонним движением; тогда наш исходный неориентированный граф будет схемой улиц с двусторонним движением. Соответственно, эйлеров цикл в ориентированном графе  $G$  – это просто эйлеров цикл, который проходит по улицам в правильном направлении. Гамильтонов цикл в  $G$  определяется аналогично (рис.8).

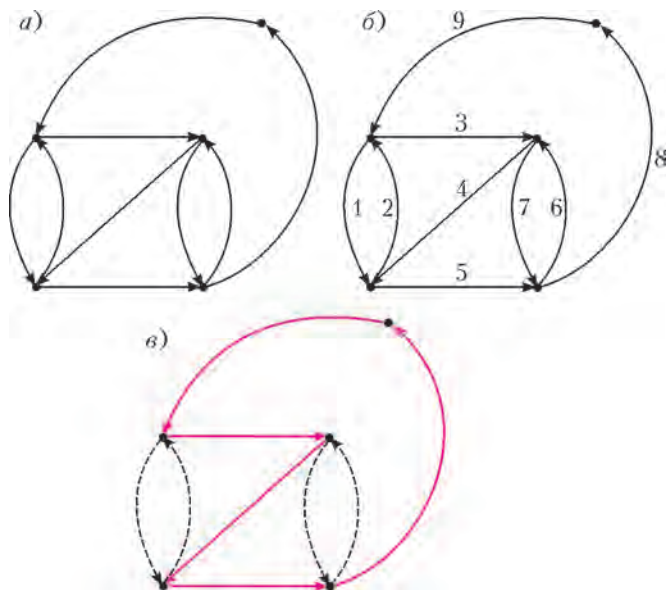


Рис.8. а) Простой пример ориентированного графа. Стрелки определяют ориентацию на ребрах.  
б) Пример эйлерова цикла в ориентированном графе; ребра пронумерованы в порядке их обхода по циклу.  
в) Пример гамильтонова цикла (выделен красным) в ориентированном графе

Для каждой вершины  $v$  в ориентированном графе  $G$  определим *входящую степень* вершины  $v$  как число ребер, входящих в  $v$ , а *исходящую степень*  $v$  как число ребер, выходящих из  $v$ . Теперь мы готовы сформулировать результат Эйлера применительно к ориентированным графам.

**Вторая теорема Эйлера.** *Наличие у ориентированного графа  $G$  эйлерова цикла равносильно тому, что у каждой вершины  $G$  равны входящая и исходящая степени (напомним, что граф предполагается связным).*

Доказательство второй теоремы Эйлера приведено в конце этой статьи вместе с обсуждением того, как можно найти эйлеров цикл достаточно «быстро» в смысле теории компьютерных вычислений. Основная идея состоит в том, что нам не надо проверять по очереди все возможные циклы в ориентированном графе  $G$  для того, чтобы понять, содержит ли  $G$  эйлеров цикл. Достаточно лишь посчитать входящие и исходящие степени всех вершин: если у каждой вершины входящая и исходящая степени совпадают, то эйлеров цикл можно легко построить; если же есть хоть одна вершина, у которой входящая и исходящая степени различны, то провести эйлеров цикл невозможно.

## Решаемые и нерешаемые задачи

Вдохновленные теоремой Эйлера, мы можем задать вопросом, существует ли подобный простой результат для решения ЗГЦ. Но несмотря на то, что выиграть в «Икосаэдрическую игру» не так уж сложно, решение ЗГЦ для произвольного графа остается неизвестным.

Главная трудность заключается в том, что если для решения ЗЭЦ у нас есть теорема Эйлера, то для ЗГЦ аналогичное простое условие неизвестно. Конечно, вы всегда можете задействовать для решения ЗГЦ метод «грубой силы», т.е. запрограммировать компьютер перебирать все пути по графу и сообщать, как только он найдет гамильтонов цикл. Понять этот метод довольно легко, но представьте себе огромный граф, в котором нет гамильтонова цикла. Для этого графа компьютеру придется проверить каждый путь по нему, перед тем как сообщить вам, что гамильтонова пути не существует. Катастрофический недостаток этого метода состоит в том, что в среднем графе всего лишь из тысячи вершин разных путей существует больше, чем атомов во вселенной!

ЗГЦ была одной из первых алгоритмических задач, которую не удалось решить даже самым блестящим ученым. После многих лет бесплодных усилий специалисты в области computer science начали задумываться, является ли ЗГЦ эффективно разрешимой. Другими словами, не может ли оказаться так, что их неудачи в поисках быстрого алгоритма вызваны не недостатком сообразительности, а тем, что эффективного алгоритма для решения ЗГЦ просто не существует. Более того, в 1970-х годах ученые-компьютерщики обнаружили еще тысячи разных алгоритмических задач с той же судьбой, как у ЗГЦ: несмотря на то, что они чрезвычайно просто выглядят, никто не смог придумать для них эффективного решения. ЗГЦ вместе со многими из этих задач теперь называют «NP-полными»<sup>2</sup> задачами.

Еще больше усилил разочарование, вызванное неудачей всех попыток найти простое условие разрешимости ЗГЦ, такой факт: хотя все NP-полные задачи различны, оказывается, они все эквивалентны друг другу – если найти быстрый алгоритм решения одной такой задачи, то из него автоматически получится быстрый алгоритм для всех остальных! Задача эффективного решения NP-полных задач (или окончательного доказательства того, что такого решения не существует) настолько фундаментальна для computer science и математики, что она вошла в список «Задач Тысячелетия» от Математического Института Клэя, опубликованный в 2000 году: найдите эффективный алгоритм для какой-нибудь NP-полной задачи или докажите, что его нет, и институт вручит вам приз в размере миллиона долларов.

С этого момента мы будем называть ЗЭЦ «простой», а ЗГЦ – «сложной». Не забывайте об этом различии, поскольку в скором времени оно станет критичным.

<sup>2</sup> NP – от слов non-deterministic polynomial (англ.).



## От Эйлера и Гамильтона к сборке генома

### Сборка генома как задача поиска гамильтонова цикла

Вооруженные необходимой математикой, вернемся к сборке фрагментов. Предположим, мы прочитали все наши риды. Сделаем теперь четыре допущения, чтобы упростить изложение:

1. Мы реконструируем кольцевой геном<sup>3</sup>.
2. Все риды имеют одинаковую длину  $l$  (будем также называть их  $l$ -мерами).
3. Все возможные подстроки длины  $l$ , встречающиеся в нашем геноме, были прочитаны как риды.
4. Риды были прочитаны без каких-либо ошибок.

На самом деле можно обойтись и без этих упрощений, но тогда придется обсуждать слишком много технических моментов.

На заре секвенирования ДНК была предложена следующая идея сборки фрагментов. Построим граф  $G$ , образовав вершину для каждого рида ( $l$ -мера); соединим  $l$ -мер  $R_1$  с  $l$ -мером  $R_2$  ориентированным ребром, если строка, образованная последними  $l-1$  символами  $R_1$  (называемая *суффиксом*  $R_1$ ) совпадает со строкой образованной первыми  $l-1$  символами  $R_2$  (называемой *префиксом*  $R_2$ ). Например, в случае  $l=5$  мы соединим ГГЦАТ с ЦАТЦГ ориентированным ребром, но не наоборот. Пример такого графа  $G$  приведен на рисунке 9,а.

Теперь рассмотрим цикл в  $G$ . Он начинается с  $l$ -мера  $R_1$  и затем по ориентированному ребру переходит к другому  $l$ -меру  $R_2$ ; будем представлять себе переход по этому ребру как то, что мы начали с  $R_1$  и, присоединив к нему единственный новый символ из  $R_2$ , образовали строку  $S$  длины  $l+1$ . В случае приведенного выше примера, перейдя от ГГЦАТ к ЦАТЦГ, мы получим строку ГГЦАТЦ. Обратите внимание, что первые  $l$  символов строки  $S$  образуют  $R_1$ , а

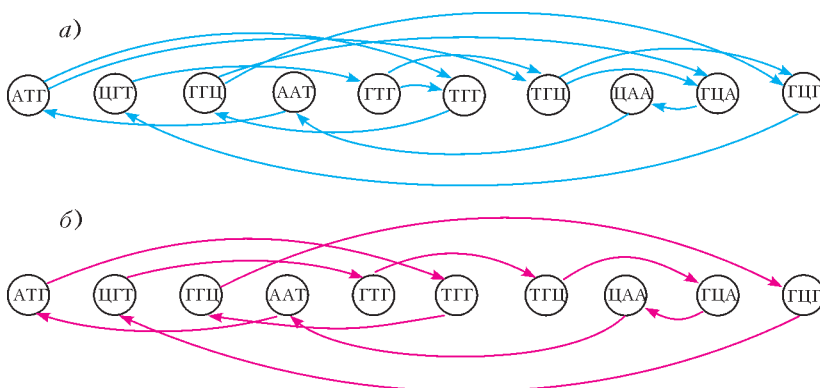


Рис.9. а) Граф  $H$  для набора 3-меров АТГ, ЦГТ, ГГЦ, ААТ, ГТГ, ТТГ, ТГЦ, ЦАА, ГЦА и ГЦГ

б) Гамильтонов путь в  $H$ . Какая циклическая последовательность букв соответствует этому циклу?

последние  $l$  символов строки  $S$  образуют  $R_2$ . В каждой новой вершине, в которую мы попадаем, мы дописыва-

ем к  $S$  один новый символ; при этом последние  $l$  символов нашей строки образуют рид текущей вершины. В конце цикла наша (циклическая) строка  $S$  будет содержать все  $l$ -меры, по которым мы прошли по дороге. Продолжая эту мысль, каждый *гамильтонов* цикл в  $G$ , который проходит через все вершины  $G$ , должен соответствовать строке нуклеотидов, которая содержит каждый из наших  $l$ -меров. Далее, так как каждая подстрока из  $S$  длины  $l$  соответствует какому-то  $l$ -меру, то  $S$  имеет минимальную возможную длину и является кандидатом для искомой последовательности ДНК (рис.9,б).

Недостаток этого довольно элегантного метода в том, что он основывается на решении ЗГЦ и потому на практике не пригоден, кроме случаев, когда наш граф  $G$  невелик. Стало быть, этот метод не подходит для графов, полученных из геномов, которые могут содержать миллиарды вершин.

### Сборка генома как задача поиска эйлерова цикла

Но не все еще потеряно. Давайте поступим довольно неожиданным образом и вместо вершины сопоставим каждому риду ребро. Для этого рассмотрим префиксы и суффиксы всех ридов. Заметим, что у разных ридов могут быть общие суффиксы и префиксы; например у ридов ЦАГЦ и ЦАГТ длины 4 есть общий префикс ЦАГ. Построим граф  $E$ , где вершины соответствуют различным префиксам и суффиксам; соединим  $(l-1)$ -мер  $A$  с  $(l-1)$ -мером  $B$  ориентированным ребром, если есть рид, чьим префиксом является  $A$ , и чьим суффиксом является  $B$ . На рисунке 10 приведен этот граф для того же набора ридов, что и на рисунке 9.

Решающий вопрос: чему соответствует цикл в  $E$ ? Снова представьте себе, что вы муравей, выползающий из какой-то вершины в  $E$  по ориентированному ребру в другую вершину, двигаясь по направлению стрелок. Как и в случае с  $G$ , составляем по дороге строку  $S$ , записывая последний символ из второй вершины после тех, которые были написаны в первой.

Понятно, что сначала  $S$  будет просто ридом, соответствующим ребру между первыми двумя вершинами. Обратите внимание, что на рисунке 10 мы пометили каждое ребро соответствующим 3-мером.

Будем повторять этот процесс по мере того, как муравей ползет по  $E$ . С каждым новым ребром мы добавляем еще один нуклеотид к строке  $S$  и, таким образом, узнаем еще один рид. Поэтому эйлеров цикл на  $E$  будет порождать (циклическую) строку  $S$ , которая содержит все наши риды, поэтому  $S$  будет кандидатом для искомой последовательности ДНК.

Но теперь, в отличие от того, что было с графом  $G$ , у нас нет вычислительных затруднений: ЗЭЦ легко решается с помощью теоремы Эйлера. Таким образом, мы свели сборку фрагментов к легко решаемой вычислительной задаче — если, конечно, в графе  $E$  вообще есть эйлеров цикл!

<sup>3</sup> У бактерий обычно так оно и есть.

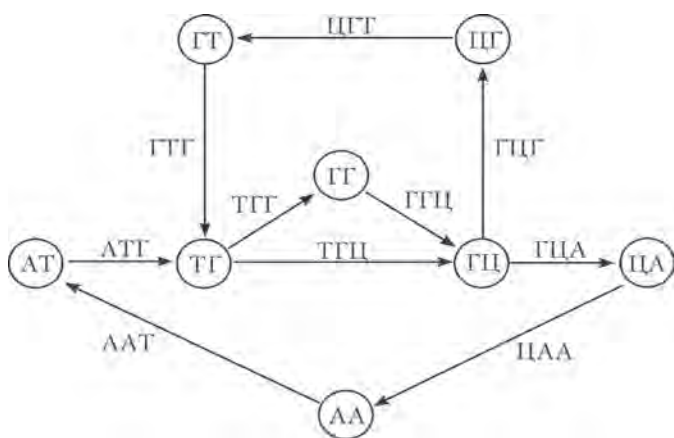


Рис.10. Граф  $E$  для того же набора ридов, что и на рисунке 9. Можете ли вы найти эйлеров цикл в этом графе? Какая циклическая последовательность букв соответствует этому циклу?

На самом деле, этот метод нуждается в уточнении – поговорим об этом после небольшого отступления.

**Отступление – графы де Брёйна**

В 1946 году голландский математик *Николас де Брёйн* (его портрет приведен на рисунке 14,в) заинтересовался задачей построения кольцевой строки минимальной длины, содержащей в качестве подстрок все возможные последовательности из  $l$  двоичных цифр. Например, закольцованная строка 00011101 содержит все последовательности из 3 двоичных цифр: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 и 111. Легко понять, что 00011101 – это кратчайшая такая строка, потому что в ней не содержится никаких «лишних» цифр, т.е. каждая подстрока длины 3 является единственным вхождением одного из приведенных выше двоичных чисел (рис.11).

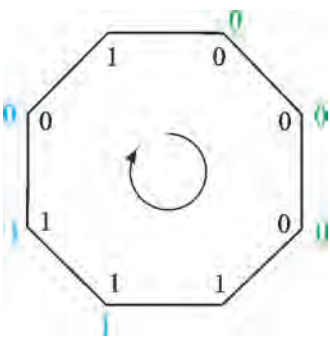


Рис.11. Поиск минимальной кольцевой строки, содержащей в качестве подстрок все возможные последовательности заданной длины. Здесь показана двоичная строка 00011101 и выделены вхождения в нее последовательностей 000 и 110. Заметим, что в эту строку входят все двоичные последовательности из трех цифр без повторов, поэтому строка 00011101 имеет минимальную возможную длину

Де Брёйн исследовал конкретный класс графов, определенный следующим образом. Рассмотрим алфавит из  $n$  букв и фиксированное число  $l$ . Выпишем все  $n^{l-1}$  возможных слов длины  $l-1$ , где слово длины  $l-1$  – это просто строка из  $l-1$  символов нашего алфавита. Де Брёйн построил граф  $B(n, l)$  (ныне называемый *графом де Брёйна*), в котором вершинам соответствуют все  $n^{l-1}$  возможных слов длины  $l-1$ ; ориентированное ребро соединяет слова  $w_1$  и  $w_2$ , если существует  $l$ -буквенное слово  $W$ , для которого  $w_1$  является префиксом, а  $w_2$  – суффиксом (рис.12).

Все графы де Брёйна обладают важным свойством: каждый из них содержит эйлеров цикл. Например, на рисунке 12 можно видеть, что у каждой вершины  $B(2, 4)$  есть два входящих и два выходящих ребра, из

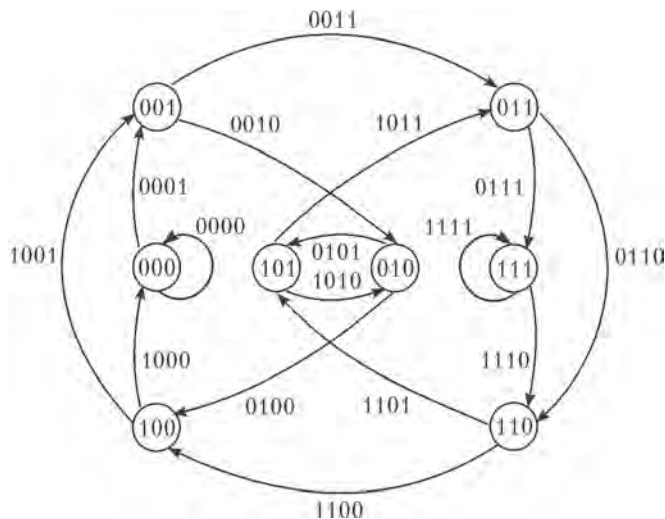


Рис.12. Граф де Брёйна  $B(2, 4)$  с «алфавитом» из двух символов – цифр 0 и 1. Обратите внимание, что из теоремы Эйлера следует, что в этом графе есть эйлеров цикл (этот цикл показан на рисунке 19)

чего следует, что у этого графа есть эйлеров цикл. Чтобы понять, почему это верно для всех графов де Брёйна  $B(n, l)$ , рассмотрим вершину  $w$ , соответствующую слову длины  $l-1$ . Существует  $n$  слов длины  $l$  с префиксом  $w$  (каждое такое слово получается добавлением одной из  $n$  букв в конец  $w$ ), и поэтому исходящая степень каждой вершины в  $B(n, l)$  равна  $n$ . Похожим образом можно показать, что существует  $n$  слов длины  $l$  с суффиксом  $w$  (каждое такое слово получается приписыванием одной из  $n$  букв к началу  $w$ ), и поэтому входящая степень каждой вершины в  $B(n, l)$  тоже равна  $n$ . Стало быть, у каждой вершины в  $B(n, l)$  исходящая и входящая степени равны  $n$ , и тогда из теоремы Эйлера сразу следует, что у  $B(n, l)$  должен быть эйлеров цикл.

Связь с нашей биологической задачей станет ясной тогда, когда мы заметим, что граф  $E$  содержится в графе де Брёйна  $B(4, l)$ . В самом деле: вершинами  $E$  являются все  $(l-1)$ -меры встречающиеся в виде префиксов или суффиксов наших ридов, а вершины  $B(4, l)$  – это все возможные  $(l-1)$ -меры.

**Копийность ридов и другие осложнения**

Предположим, что последовательность нашего генома – АТГЦАТГЦ. Тогда мы получим 4 рида длины 3: АТГ, ТГЦ, ГЦА и ЦАТ, из которых, к сожалению, можно ошибочно реконструировать этот геном как АТГЦ. Все дело в том, что каждый из этих ридов в правильном геноме встречается *дважды*. Поэтому нам понадобится переделать процесс сборки генома. Предположим, что нам известны не только последовательности всех ридов, но и то, сколько раз данный  $l$ -мер встречается в геноме (это число называется *копийнос-*

тью ряда). Оказывается, мы сможем справиться со сборкой фрагментов и в этом случае.

Мы используем для этого практически тот же граф  $E$ , с одним лишь изменением: если копийность какого-то  $l$ -мера равна  $k$ , то будем соединять его префикс с суффиксом не одним, а  $k$  ребрами. Продолжим разбирать наш пример из рисунка 10: если во время чтения ридов обнаружилось, что у четырех 3-меров ТГЦ, ГЦГ, ЦГТ и ГТГ копийность равна 2, а у шести 3-меров АТГ, ТГЦ, ГГЦ, ГЦА, ЦАА и ААТ копийность равна 1, то мы построим граф, изображенный на

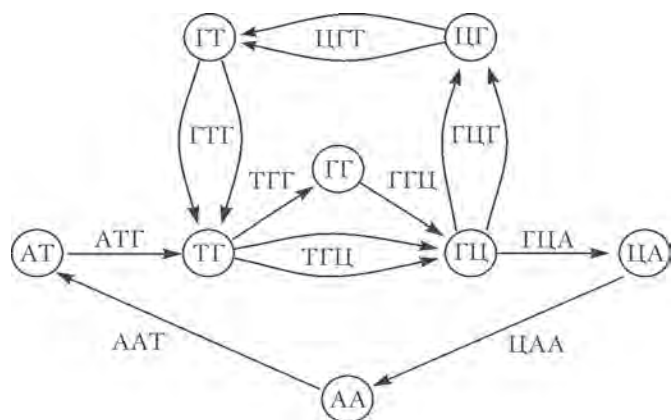


Рис.13. Граф с рисунка 10, в который добавились кратные ребра — было учтено, что копийность некоторых ридов больше 1. К счастью, такое обобщение не усложняет задачу поиска эйлерова цикла, и цикл для нового графа также будет давать кандидата для последовательности «ДНК»

рисунке 13. В общем случае, легко видеть, что граф с ребрами, добавленными согласно копийности, тоже эйлеров, поскольку полустепени исхода и захода вершины (соответствующей  $(l - 1)$ -меру) равны числу раз, которое этот  $(l - 1)$ -мер встречается в геноме.

На практике точную информацию о копийности  $(l - 1)$ -меров в геноме с помощью современных технологий секвенирования получить довольно сложно. Тем не менее, ученые-алгоритмисты недавно придумали способ восстановления геномной последовательности даже тогда, когда эти данные отсутствуют.

Есть и другие осложнения: машины, секвенирующие ДНК, подвержены ошибкам, длина ридов может различаться и так далее. Однако, в конечном счете, для всех методов сборки фрагментов оказывается очень полезно применить какой-нибудь вариант графов де Брёйя для того, чтобы свести естественное построение гамильтоновых циклов к алгоритмически более простой задаче об эйлеровых циклах.

## Короткая история чтения ридов

### Сказка о трех биологах: ДНК-чипы

Хотя математическое наследие Эйлера, Гамильтона и де Брёйя (рис. 14) тесно переплелось, они

сами при всем желании не смогли бы встретиться друг с другом. Зато в 1988 году встретились пути трех других ученых (рис.15). Радое Дрманац (Radoje Drmanac, Сербия), Андрей Мирзабеков (Россия) и Эдвин Саузерн (Edwin Southern, Великобритания) одновременно и независимо разработали футуристический и на тот момент совершенно невероятный метод чтения ридов с использованием *ДНК-чипов*. Никто из этих трех биологов не знал о работах Эйлера, Гамильтона и де Брёйя; никто не мог и предположить, что результаты их собственных экспериментов столкнут их лицом к лицу с этими математическими гигантами.

В 1977 году Фред Сэнгер (Fred Sanger) с коллегами отсеквенировали первый вирус — крошечный бактериофаг  $\phi X174$  длиной 5375 нуклеотидов. Несмотря на то, что в конце 1980-х биологи регулярно секвенировали вирусы длиной в сотни тысяч нуклеотидов, мысль о секвенировании бактериального генома (не говоря о человеческом) казалась преждевременной и с экспериментальной, и с вычислительной точек зрения. Дрманац, Мирзабеков и Саузерн поняли, что важнейшим недостатком исходной технологии секвенирования ДНК, разработанной в 1970-х, является то, что для более длинных геномов она слишком затратна. В самом деле, чтение одного рида в конце 1980-х стоило более одного доллара и поэтому секвенирование генома какого-нибудь млекопитающего стоило бы миллиарды долларов. Из-за этой высокой цены прочитать все  $l$ -меры генома было невозможно, а это непременное условие успешного применения эйлерова подхода. ДНК-чипы были изобретены для того, чтобы удешевить чтение всех  $l$ -меров в геноме, пусть и с меньшей, нежели у исходной технологии секвенирования ДНК, длиной рида  $l$ . Например, в то время как традиционные технологии секвенирования считывали риды длиной приблизительно 500 нуклеотидов, изобретатели ДНК-чипов ориентировались на чтение ридов длиной около 15 нуклеотидов.

ДНК-чипы устроены так: сначала синтезируют все  $4^l$  возможных  $l$ -меров (т.е. все фрагменты ДНК длины  $l$ ), потом их присоединяют к *ДНК-микрочипу*, который представляет из себя решетку с отдельной ячейкой для каждого  $l$ -мера. Потом берут (неизвест-



Рис.14. Три математика. Слева направо: Леонард Эйлер, Уильям Гамильтон, Николас де Брёйя



Рис.15. Три биолога. Слева направо: Радое Дрманец, Андрей Мирзабеков, Эдвин Саузерн

ный) фрагмент ДНК, на него наносят флюоресцентную<sup>4</sup> метку, и раствор с этим помеченным фрагментом ДНК наносят на ДНК-микрочип. В результате нуклеотиды фрагмента ДНК гибридизируются (связываются) с комплементарными парами на микрочипе (А связывается с Т, Ц с Г). Все что остается, – выяснить с помощью спектроскопии, в каких местах на микрочипе флюоресценция самая яркая: тогда нашими рядами будут последовательности, комплементарные к тем, что расположены в соответствующих ячейках микрочипа. Изображение ДНК-микрочипа для набора ридов из нашего постоянного примера приведено на рисунке 16.

AAA	AGA	CAA	CGA	GAA	GGA	TAA	TGA
AAЦ	AGЦ	CAЦ	CGЦ	GAЦ	GGЦ	TAЦ	TGЦ
AAГ	AGГ	CAГ	CGГ	GAГ	GGГ	TAГ	TGГ
AAТ	AGТ	CAТ	CGТ	GAТ	GGТ	TAТ	TGТ
АЦА	АТА	ЦЦА	ЦТА	ГЦА	ГТА	ТЦА	ТТА
АЦЦ	АТЦ	ЦЦЦ	ЦТЦ	ГЦЦ	ГТЦ	ТЦЦ	ТТЦ
АЦГ	АТГ	ЦЦГ	ЦТГ	ГЦГ	ГТГ	ТЦГ	ТТГ
АЦТ	АТТ	ЦЦТ	ЦТТ	ГЦТ	ГТТ	ТЦТ	ТТТ

Рис.16. ДНК-микрочип, содержащий все возможные 3-меры. В десяти клеточках, которые выделены цветом, представлены 3-меры, дополнительные к рядам с рисунков 9 и 10. Например, ЦАЦ выделен, поэтому дополнительный к нему рид ГТГ был на тех рисунках. Отметим, что ДНК-микрочип не содержит никакой информации о копийности ридов

Поначалу почти никто не верил, что идея микрочипов сработает, потому что и биохимическая задача синтеза миллионов коротких фрагментов ДНК, и математическая задача восстановления последовательности казались слишком сложными. В 1988 году журнал «Science»

<sup>4</sup> На самом деле в то время речь шла не о флюоресцентной, а о радиоактивной метке.

написал, что, учитывая объем работы, необходимый для производства ДНК-микрочипа, «применение ДНК-чипов для секвенирования было бы заменой одной устрашающей задачи на другую». Как оказалось, «Science» ошибался: в середине 1990-х небольшое число молодых компаний усовершенствовали технологию создания больших ДНК-микрочипов. К сожалению, ДНК-чипы в конечном итоге не смогли осуществить мечту своих создателей. Чипы непригодны для секвенирования ДНК, потому что

точность гибридизации ДНК с чипами слишком низка, а значение  $l$  – слишком мало.

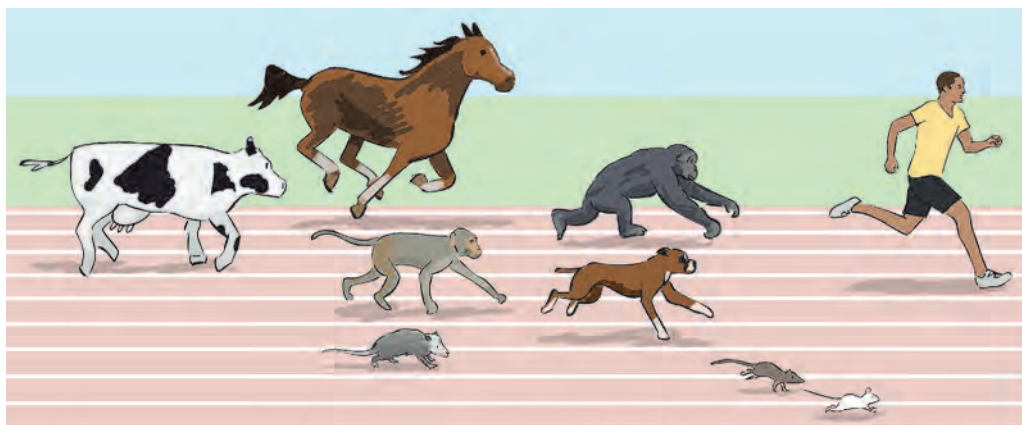
Тем не менее, неудача ДНК-чипов имела полезный побочный эффект: хотя исходная цель (секвенирование ДНК) и не была на тот момент достигнута, вместо нее возникли две новых неожиданных области применения микрочипов. Сегодня чипы используются для измерения уровня экспрессии<sup>5</sup> генов и для анализа генетических вариаций. Эти новые приложения привели к созданию многомиллиардной индустрии ДНК-чипов, включающей компании «NuSeq» (основана Радое Дрманцем) и «Oxford Gene Technology» (основана сэром Эдвином Саузерном).

#### Недавняя революция в секвенировании ДНК

После основания компании «NuSeq» Радое Дрманец не оставил своей мечты об изобретении альтернативного способа секвенирования ДНК. В 2005 он основал компанию «Complete Genomics», которая недавно разработала технологию чтения (почти) всех  $l$ -меров в геноме, тем самым позволив, наконец, применение метода эйлеровой сборки. Хотя используемая Дрманцем технология чипов с «наношариками» достаточно сильно отличается от предложенной им в 1988 году технологии ДНК-чипов, наследие той идеи в чипах с наношариками довольно ощутимо, подтверждая тем самым старую истину, что хорошие идеи не умирают, даже если они проваливаются. Более того, некоторые другие компании, включая «Illumina» и «Life Technologies», соревнуются с «Complete Genomics», используя свои собственные технологии для чтения (почти) всех  $l$ -меров в геноме. ДНК-чипы оказались неспособны выдавать точные последовательности ридов длиной хотя бы 15 нуклеотидов, но технологии секвенирования следующего поколения читают риды длины 25 нуклеотидов<sup>6</sup> и даже больше (при этом считывая сотни миллионов таких ридов за один эксперимент). За последние 5 лет эти разработки в области технологий секвенирования полностью преобразили геномику, и теперь биологи готовятся к сборке геномов всех млекопитающих на Земле

<sup>5</sup> Экспрессия генов – процесс производства белка, кодируемого этим геном.

<sup>6</sup> В настоящее время – более 100.



Корова	Лошадь	Опоссум	Макака	Собака	Шимпанзе	Крыса	Мышь	Человек
2009	2007	2007	2006	2005	2005	2004	2002	2001

Рис.17. К 2010 году были расшифрованы геномы всего девяти млекопитающих: человека, мыши, крысы, собаки, шимпанзе, макаки, опоссума, лошади и коровы. С тех пор уже многое изменилось, но многое еще впереди

(рис.17), все еще основываясь на прекрасной идее, которую Леонард Эйлер придумал в 1735 году.

**Доказательство второй теоремы Эйлера**

Мы докажем теорему в случае ориентированных графов (теорема для неориентированных графов доказывается аналогичным образом).

Итак, для доказательства мы должны проверить, что (1) у графа с эйлеровым циклом исходящая и входящая степени любой вершины равны, (2) если в связном графе исходящая и входящая степени любой вершины равны, то для него имеется эйлеров цикл.

1. Пусть граф имеет эйлеров цикл. Рассмотрим некоторую вершину  $v$ . Пройдем по эйлеровому циклу, начиная с некоторой вершины, отличной от  $v$ . Каждый раз, когда мы входим по некоторому ребру в вершину, мы выходим из нее по другому ребру. Тем самым, если в вершине  $v$  мы побывали  $k$  раз, то входящая и выходящая степени этой вершины равны  $k$ , т.е. равны.

2. Наоборот, предположим теперь, что в связном графе исходящая и входящая степени любой вершины равны. Будем явно строить эйлеров обход следующим образом. Возьмем некоторую вершину  $v$  в графе  $G$  и любое ребро, выходящее из  $v$ . Пройдем по этому ребру в следующую вершину. Продолжим путь, каждый раз выбирая ребро, по которому мы еще не проходили. В конце концов мы придем в начальную вершину  $v$ , при этом образуется некоторый цикл  $C_1$ . Почему наше «случайное блуждание» по ребрам графа завершится построением цикла? Это следует из условия равенства входящей и исходящей степеней: ведь каждый раз после того, как мы пришли в вершину, отличную от  $v$ , мы сможем покинуть ее по еще не пройденному ребру.

Для цикла  $C_1$  есть две возможности: либо  $C_1$  уже является эйлеровым циклом, либо нет. Во втором случае временно удалим ребра  $C_1$  из  $G$ . Получим новый граф  $H$ . Так как в цикле  $C_1$  для каждой вер-

шины исходящая и входящая степени равны, то это условие сохраняется и для графа  $H$ . Так как  $G$  — связный, найдется некоторая вершина  $w$  из  $H$ , из которой есть исходящие ребра, принадлежащие как графу  $H$ , так и  $C_1$ . Как и выше, в графе  $H$  выделим цикл  $C_2$ , начинающийся в вершине  $w$ . Теперь у нас два цикла  $C_1$  и  $C_2$ , не имеющие общих ребер, и оба они проходят через вершину  $w$ . Мы можем объединить эти два цикла  $C_1$  и  $C_2$  в один «суперцикл»  $C$  (рис. 18).

Далее проверяем, является ли цикл  $C$  эйлеровым.

В случае если нет, повторяем процедуру «наращивания» цикла.

Эта процедура не может продолжаться бесконечно (в графе конечное число ребер), поэтому на очередном шаге мы получим эйлеров цикл.



Рис.18. Объединение циклов. Если два цикла проходят через одну и ту же вершину  $w$ , то их можно объединить в один цикл, просто поменяв порядок прохода вершин, выходящих из  $w$

Замечательная особенность доказательства, представленного выше, — его «конструктивность». Ведь мы не только получили доказательство теоремы, но и получили достаточно простой алгоритм построения эйлерова цикла.

Этот алгоритм в действительности будет быстро работать и применим к графам генома, количество ребер в которых может составлять миллиарды. Наконец мы научились собирать наш гигантский пазл.

На рисунке 19 мы применяем алгоритм к графу де Брёйна с рисунка 12.

**Заключение**

Мы познакомились с Эйлером, Гамильтоном и де Брёйном — тремя математиками трех веков, живших в разных странах и ставивших перед собой совершенно разные задачи. В их работе и том, во что она превратилась в настоящий момент в современной биологии, мы можем почувствовать дух настоящего приключения. При этом первые биологи, которые работали над задачей секвенирования ДНК, не имели никакого

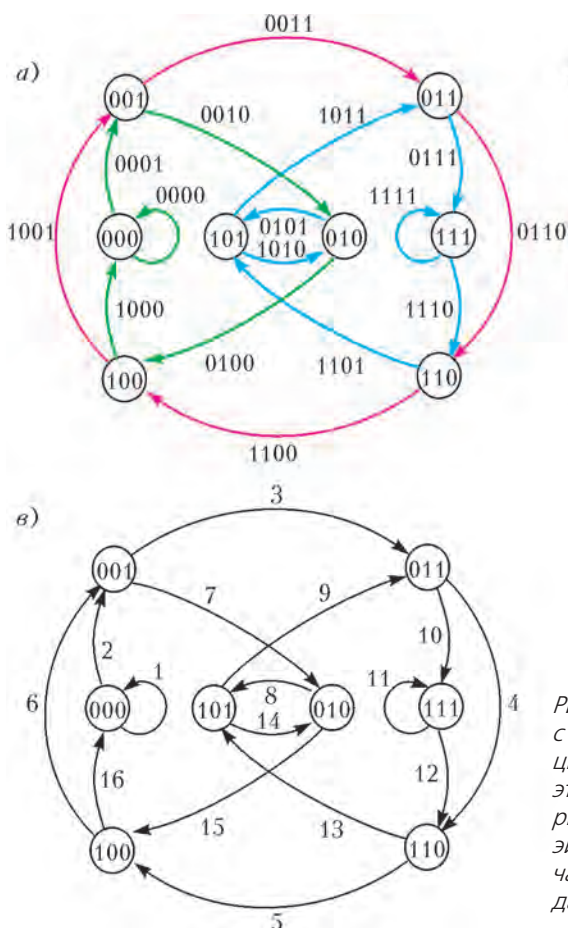


Рис.19. Поиск эйлерова цикла в графе  $B(2, 4)$  с рисунка 12. Сначала разбиваем граф на циклы (а). Затем по очереди объединяем эти циклы, применяя описанный выше алгоритм (б). В итоге получится единственный эйлеров цикл (в); цифры на ребрах обозначают порядок обхода. В нашем случае цикл дает строку 0000110010111101

представления о том, как применить для этого теорию графов; более того, первая статья, объединившая математические идеи этого трио для сборки фрагментов, была опубликована спустя многие годы после смерти Эйлера и Гамильтона, когда де Брёйну было уже за 70. Так что, возможно, стоит представлять себе этих троих ученых не как искателей приключений, а как одиноких странников. Каждый из них любил решать абстрактные математические задачи, даже не предполагая (как это часто бывает у математиков), что их ответы могут быть однажды применены в реальном мире уже без них самих.

### Примечания

Решение Эйлера для задачи о Кенигсбергских мостах было представлено в Академии наук и искусств в Санкт-Петербурге 26 августа 1735 года. Эйлер был самым плодовитым автором математических работ всех времен: помимо теории графов он впервые использовал запись  $f(x)$  для обозначения функции,  $i$  для квадратного корня из  $-1$  и постоянной  $\pi$  для вычисления длины окружности. Напряженно работая всю свою жизнь, он ослеп. В 1735 году он перестал видеть правым глазом, но не бросил занятий математикой. В 1766 году он потерял зрение и на левом глазу и все равно продолжил работать, сказав лишь, что «теперь у меня будет меньше поводов отвлекаться». Уже совершенно ослепнув, он опубликовал сотни статей.

После работы Эйлера, решающей задачу о Кенигсбергских мостах, о теории графов забыли более чем на сто лет, но во

второй половине XIX века она была возвращена к жизни выдающимися математиками, среди прочих и Уильямом Гамильтоном. Теория графов окончательно расцвела в XX веке, став одним из основных направлений математических исследований.

Первые методы секвенирования ДНК были независимо и одновременно изобретены в 1977 году Фредом Сэнгером с коллегами с одной стороны и Уолтером Гильбертом (Walter Gilbert) с коллегами – с другой. Подход к секвенированию ДНК с помощью гамильтоновых циклов был впервые предложен в 1984 году (H.Peltola, H.Soderlund, E.Ukkonen), а впоследствии развит Джоном Кесесиоглу (John Kescioglu) и Юджином Майерсом (Eugene Myers). Развитие методов секвенирования ДНК привело к расшифровке полного генома бактерии *H. influenzae* длиной 1800 Кб в середине 1990-х. Геном человека был отсеквенирован с использованием гамильтонова подхода в 2001.

Использование ДНК-чипов было предложено одновременно и независимо в 1988 году Радое Дрманцем и коллегами в Югославии, Андреем Мирзабековым и коллегами в России и Эдвином Саузерном и коллегами в Великобритании. Эйлеров подход к ДНК-чипам был описан П.Певзнером. Эйлеров подход к секвенированию ДНК был описан R. Idury и M. Waterman, а в дальнейшем развит в 2001 году (P.A. Pevzner, H.Tang и M.Waterman), когда уже почти никто не верил, что его станет возможно применить на практике.

Примерно в то же время Сидни Бреннер (Sydney Brenner) с коллегами представили метод Massively Parallel Signature Sequencing (MPSS, метод сильно распараллеленного секвенирования подписей), который ознаменовал начало эры секвенирования нового поколения с использованием коротких ридов. На протяжении последнего десятилетия MPSS вместе с технологиями, разработанными такими компаниями, как «Complete Genomics», «Illumina» и «Life Technologies», совершили переворот в геномике. Технологии нового поколения считывают довольно короткие риды, длиной от 30 до 100 нуклеотидов, усложняя этим задачу сборки фрагментов. Чтобы разрешить этот вопрос, было разработано большое количество средств сборки, все из которых следуют эйлерову подходу.

Заинтересованный читатель может прослушать в интернете (бесплатно) курс по биоинформационным алгоритмам, который начнется 15 сентября. Подробности по ссылке

<https://www.coursera.org/course/bioinformatics>

Также рекомендуем книгу «Биоинформатика для биологов» («Bioinformatics for biologists») под редакцией П.Певзнера и Р.Шамира, выпущенную на английском языке издательством «Cambridge university press» в 2011 году.

# Очерк истории исследований нейтрино

Ю. ГАПОНОВ

**И**ТАК, К 1956 ГОДУ СТАЛО ЯСНО СЛЕДУЮЩЕЕ. Что касается квантовой электродинамики, то, в принципе, она построена, оставались только проблемы расходимостей, с которыми физика еще долго возилась и в какой-то мере продолжает возиться и сегодня. Но это уже проблемы, связанные с высокими точностями теорий. Затем впервые физики обратили внимание на так называемые дискретные симметрии – отражение пространственное, отражение временное и преобразование заряда (когда вы переходите от частиц к античастицам). Ну вот, эти идеи были развиты. Дальше – и это было самое интересное – в К-мезонах, которые в это время уже научились рождать на ускорителях, возникла совершенно новая проблема. Опять парадокс, и опять он связан в какой-то мере, как мы увидим дальше, с физикой слабого взаимодействия (в данном случае это физика слабого взаимодействия, а не совсем нейтрино, но в нейтрино имеет место то же самое). А именно, это  $\tau$ - $\theta$ -проблема. Измеряя К-мезонные распады, нашли такие частицы, которые распадаются на два пиона или на три пиона (разные частицы, естественно). При этом массы этих частиц практически совпадают. Как это может быть? Вот проблема, которая мучила физиков с 1953 по 1956 год, а ответ на нее оказался совершенно уникальным: в этих распадах нарушается четность, закон сохранения четности. И вот, эта гипотеза была выдвинута в 1956 году Ли и Янгом, и буквально за год эксперимент по проверке сохранения четности в бета-распаде был сделан, это все было подтверждено, и выяснилось, что у нейтрино есть совершенно новые свойства. Сейчас я вам несколько слов на эту тему скажу.

Что такое четность? Напомню. Все физики знают, что есть векторы: радиус, скорость, импульс... Есть операция отражения. Ну вот, нарисуем, например, импульс в неких координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Давайте произведем отражение. Если я сделаю полное отражение всего – и осей, и самого импульса тоже, то это будет вариант возможный, но не совсем та операция, с которой мы хотим работать. Я же хочу отразить импульс, но сохранить координаты, т.е. провести отражение в старых координатах. Ясно, что вектор при такой операции просто поменяет знак:  $\vec{r}$  поменяется на  $-\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  на  $-\vec{v}$ ,  $\vec{p}$  на  $-\vec{p}$ . Однако существуют другие величины, типа векторного произведения двух векторов, которые имеют другие свойства. Вот, например,



Юрий Владимирович Гапонов

момент силы или момент импульса. Если вы делаете отражение, то, поскольку у вас есть два вектора и оба знак меняют, эти псевдовекторы, как мы их называем, не меняют знака. В частности, раз есть момент, то, естественно, кручение самой частицы тоже можно рассматривать как некий момент, который тоже не должен менять свой знак при отражении. И, наконец, если я ее, эту частицу, сведу в точку, сделаю ее точечной, то возникает понятие спина. Я не хочу сейчас влезать в эти понятия, физики знают, что это такое, я просто немного примитивизирую картину, чтобы вам проще было понимать ситуацию. Поляризация спин-частиц как раз имеет те же свойства, что и векторное произведение.

Давайте теперь рассмотрим такой процесс. Пускай у нас есть нейтрино, и пускай нейтрино летит по импульсу  $\vec{p}$ , а поляризовано против импульса. В действительности реальные нейтрино так и устроены – они поляризованы против своего импульса. Проведем отражение. Тогда в отражении, т.е. в зеркале, вы увидите, что импульс у вас поменялся, а спин не изменился. У вас появилась частица, у которой спин и импульс направлены в одну и ту же сторону. А с точки зрения сегодняшней физики это – антинейтрино. Значит, в

зеркале (вы смотрите в зеркало) вместо нейтрино вы видите антинейтрино, а не нейтрино. Вот парадокс, с которым столкнулись физики в 1956–57 годах. Точно так же вы можете сделать, например, такой эксперимент. Рассмотрите поляризованное ядро, которое у вас распадается, вылетают электроны под углом  $\theta$ , и вы делаете отражение. У вас поляризованное ядро останется поляризовано в ту же сторону, а импульс поменяет знак. Если бы у вас закон сохранения четности выполнялся, то оба процесса были бы одинаковы. А на самом деле оказывается, что при бета-распаде частицы вылетают в основном по или против момента ядра. Вот это и есть знаменитый эксперимент Ву, который был сделан в 1957 году буквально за полгода. И было показано: да, в физике слабого взаимодействия, т.е. в нейтринной физике, нарушается четность. И вот здесь выяснилось, что Нильс Бор был прав. Действительно, Нильс Бор что говорил? Он придирился к закону сохранения энергии, но он был прав в своей логике: на уровне в  $10^{-13}$  –  $10^{-17}$  см законы сохранения могут быть другими. И в этом плане его идея как бы ожила заново. Ничего не пропадает, хорошие идеи сохраняются и дальше. Вот сегодняшняя точка зрения: безмассовое нейтрино поляризовано против импульса, а антинейтрино – по импульсу. Мир внутри, в слабом взаимодействии, оказывается несимметричным. В зеркале вы видите не нейтрино, а антинейтрино. И еще одно открытие было сделано вскоре после этого: процессы, связанные с направлением времени, тоже оказались разными. Были открыты процессы в распаде  $K^0$ -мезонов, которые по времени и против (со сменой знака времени) – разные.

Итак, вот что произошло в теоретический период с 1953 по 1967 год. Ли и Янг придумали гипотезу для решения проблемы  $\tau$ – $\theta$ , т.е. гипотезу о нарушении четности. Оно было экспериментально открыто в 1957 году – сначала в бета-распаде ядер, потом в бета-распаде различных частиц:  $\mu$ -мезонов,  $\pi$ -мезонов,  $K$ -мезонов; ныне это тривиальность. И, наконец, что было действительно новостью для физиков, оно было обнаружено во взаимодействии нуклонов с нуклонами в ядрах. Кстати, это до сих пор некоторая загадка. Мы прекрасно знаем, что есть так называемые нарушающие четность ядерные силы. Эти силы существуют, они экспериментально показаны. К слову сказать, Россия здесь очень много поработала – например Лобашёв (экспериментатор) и Абов Юрий Георгиевич. Но по сию пору эта область явлений никак не связана с остальными, вы не можете рассчитать ее, исходя из элементарных частиц. Элементарная частица живет сама по себе, а ядерная физика с ее нарушением нуклон-нуклонного слабого взаимодействия живет сама по себе.

Наконец, было открыто слабое взаимодействие и в атомах тоже – взаимодействие между ядром и электронами, кроме обычного кулоновского, имеет еще некую маленькую добавку. Эта добавка связана с тем, что электрон с нуклонами еще взаимодействует слабым образом. Вот эти процессы были впервые тогда открыты. А теория, после того как было открыто, что нейтрино на самом деле имеет строго определенную поляризацию, а антинейтрино имеет совершенно дру-

гую поляризацию, вернулась к Вейлю, т.е. к тому предельному случаю, который может быть получен из уравнения Дирака и который игнорировался в 1928–29 годах. Оказалось, что нейтрино описывается именно уравнением Вейля. Возьмите уравнение Дирака, положите массу равной нулю, получите нейтрино. Все просто! Но тогда это отрицалось. Отрицалось, потому что нарушение сохранения четности было. Никто не мог в это поверить.

И вот теперь такая интересная парадоксальная вещь. Я говорю про 1956 год. Итак, вернулись к двухкомпонентному нейтрино. Была попытка Ландау ввести нарушение четности, но сохранить хотя бы идею о том, что если вы смотрите на нейтрино, то в зеркале у вас антинейтрино, т.е. ввести так называемое CP-сохранение<sup>1</sup>. Это сохранение, к сожалению, тоже оказалось нарушенным, хотя намного в меньшей степени (так, доля распадов нейтральных  $K$ -мезонов с нарушением CP-инвариантности составляет примерно  $10^{-3}$ ). Затем, и это было сформулировано в основном Фейнманом, был реально написан гамильтониан<sup>2</sup> слабого взаимодействия с нарушением четности (так называемое V-A слабое взаимодействие<sup>3</sup>). И еще было открыто нарушение CP-четности (т.е., если хотите, T-четности<sup>4</sup>) в эксперименте – это следующий момент.

И, наконец, приблизительно в 1963–66 годы была сформулирована так называемая Стандартная модель<sup>5</sup>. Это модель, в которой (я немного дальше буду об этом говорить) объединены две вещи: электромагнитное взаимодействие и слабое взаимодействие – то, которое происходит с нейтрино. Стандартная модель была сформулирована именно в это время, но еще потребовалось достаточно большое время, порядка 20 лет, чтобы доказать, что это действительно так.

<sup>1</sup> CP-симметрия, или комбинированная четность, это инвариантность физических законов относительно преобразования, при котором происходит одновременно пространственное (P) зеркальное отражение физической системы и замена каждой частицы на соответствующую ей античастицу (C, зарядовое сопряжение).

<sup>2</sup> Гамильтониан – оператор полной энергии системы при квантово-механическом описании.

<sup>3</sup> V-A-теория – универсальная теория слабого взаимодействия, учитывающая нарушение четности (P-симметрии) при слабом взаимодействии. Предложена в 1957 году М.Гелл-Манном, Р.Фейнманом, Р.Маршаком и Дж.Сударшаном.

<sup>4</sup> T-симметрия, или симметрия по отношению к обращению времени, это инвариантность физических законов относительно замены времени  $t$  на  $-t$ . Поскольку фундаментальным качеством физических законов считается CPT-симметрия (т.е. инвариантность по отношению к одновременному пространственному зеркальному отражению физической системы, зарядовому сопряжению и обращению времени), то нарушение CP-симметрии возможно лишь при одновременном нарушении T-симметрии.

<sup>5</sup> Точнее, здесь идет речь о теории электрослабого взаимодействия, которая была сформулирована в 1967 году С.Вайнбергом, Ш.Глэшоу и А.Саламом и легла в основу (наряду с квантовой хромодинамикой) созданной в течение следующего десятилетия Стандартной модели физики элементарных частиц.



Но вот что интересно: несмотря на то что, казалось бы, все сформулировано и все открыто, оставались два островка в это время, которые были не понятны. Первый – это гипотеза Понтекорво о нейтринных осцилляциях, про которые я сейчас скажу, и второй – майорановская гипотеза.

Так вот, теперь я хочу сказать несколько слов о Бруно Понтекорво и его гипотезе 1957 года. Это – гипотеза осцилляций, она была опубликована опять в препринте, только теперь в Дубне. Помня про работу Майорана (Понтекорво в какой-то мере был его учеником), он все время думал о том, нейтрино и антинейтрино это одно и то же или нет? Если это одно и то же, то получаются одни процессы, если это разные вещи, то – другие процессы. И вот, размышляя над этим, Бруно Понтекорво сформулировал такую очень любопытную гипотезу. В заключении своей статьи он пишет, что если у вас нет нейтрино и антинейтрино, а есть нарушение сохранения лептонного заряда (т.е. если нейтринный заряд не сохраняется), то при этом возможно превращение нейтрино в антинейтрино в процессе движения, ( $\nu \leftrightarrow \bar{\nu}$ ), и тогда будут происходить процессы, похожие на те, которые были открыты в  $K^0$ -мезонах. А в  $K^0$ -мезонах в это время были открыты осцилляции, когда  $K^0$  переходит в анти- $K^0$  и анти- $K^0$  переходит в  $K^0$ . И Понтекорво написал даже, что, по-видимому, этот процесс может быть очень вероятно открыт, как минимум, в астрофизике, в астрофизических масштабах. Больше того, он даже дал оценку длины этих осцилляций. Средняя энергия нейтрино, которые, например, испускает Солнце, это 1 МэВ, и тогда длина осцилляций порядка  $10^3$  км. А сегодня осцилляции открыты, и их величина порядка 100–200 км. Иными словами, масса нейтрино не равна нулю (Понтекорво для массы нейтрино предположил величину  $10^{-11}$  эВ). Таким образом, если все в это время увлекались Вейлем и считали, что масса нейтрино ноль и не о чем говорить, то Понтекорво высказал вот такую гипотезу. И я еще раз подчеркиваю, это была на самом деле линия от Майорана: гипотеза Майорана – это 1937 год, 1946 год – размышления Понтекорво относительно нейтринной физики, а в 1957 году, уже в России, он высказывает идею нейтринных осцилляций. В то время нейтрино было одно. Но, кстати, он пишет, что если нейтрино будет не одно, а нескольких типов, то тоже могут быть нейтринные осцилляции<sup>6</sup>. И в 1958 году Понтекорво высказывает идею, что нейтрино на самом деле не одно, а их может быть два, что возможны нейтрино, связанные с электронами, и нейтрино, связанные с мюонами. По его идее в ЦЕРНе был поставлен эксперимент, в котором были открыты два типа нейтрино: нейтрино электронное и нейтрино мюонное (1962 г.). Вот так. А потом нам говорят, что японцы в 1962 году первые сказали: «нейтринные осцилляции».

Хорошо. Пойдем дальше.

Как видите, все не просто. Стандартная модель есть, а он (Понтекорво) – все свое. Он говорит о том, что у

<sup>6</sup> Осцилляции уже не между нейтрино и антинейтрино, а между двумя типами нейтрино.

нейтрино могут быть совершенно другие свойства. Это время, приблизительно с 1956 по 1966 год, – «теоретическое» время, время дискуссий, там много чего сложилось, много было высказано всяких идей. После этого теоретики затихли, начали работать экспериментаторы. Экспериментаторы за следующие 20 лет доказывают, что Стандартная модель действительно работает. Возникают три главных – теперь уже научились с нейтрино работать – направления в нейтринной физике. Во-первых, нейтрино низких энергий – реакторные нейтрино в основном или бета-распад. Идут исследования свойств нейтрино, делаются оценки на массу нейтрино, поляризацию нейтрино, ищутся доказательства того, что нейтрино не равно антинейтрино. И, наконец, был открыт так называемый нейтральный канал реакции, когда нейтрино не рождает электрон в обратном процессе, а просто рассеивается. Рассеивается, и все. Причем оно может рассеиваться на нуклонах – ну, на дейтроне, например, и на электронах. При этом оказалось, что в таких процессах физики вынуждены работать с совершенно экстремально малыми сечениями:  $10^{-43}$  см<sup>2</sup> – это еще хорошо. Сейчас работают на грани  $10^{-46}$  см<sup>2</sup>. Фантастически малые величины – ничего ниже мы не сможем мерить. Но именно тогда это было осознано.

Второе направление – нейтрино высоких энергий. Оно возникло, в частности, в связи с тем, что физики научились работать с ускорительными пучками. В пучках пи-мезонов, например, у вас нейтрино рождаются от распада пионов, и эти нейтрино имеют энергию, уже гораздо большую – не порядка 1 МэВ, как в реакторной физике, а порядка 1 ГэВ и даже выше. А сечение взаимодействия нейтрино с нуклонами, и вообще всех слабых процессов в этой области, пропорционально квадрату энергии падающего нейтрино. Раз так, то вы теперь можете, беря пучки нейтрино достаточно высоких энергий, выходить на большие сечения. Действительно, это направление развивалось, появились новые методы регистрации нейтрино, в частности – камеры всякие, и было доказано, что нейтрино электронное не похоже на нейтрино мюонное, что нейтрино мюонное не похоже на свое антинейтрино и что существует еще третий тип нейтрино, так называемое тау-нейтрино, от распада тау-мезона. Таким образом, появились три семейства нейтрино. Были исследованы процессы рассеяния нейтрино на электронах и на нуклонах и в параллель с этим были открыты новые кварки,  $c$ ,  $b$ ,  $t$ , причем была найдена некая аналогия между нейтрино и кварками. Нейтрино есть трех типов, и кварков есть три семейства. Наконец, самым мощным доказательством того, что Стандартная модель реализуется в природе, было два открытия: первое – открытие нейтральных процессов<sup>7</sup>, которые предсказаны только в Стандартной модели, и второе –

<sup>7</sup> Нейтральные токи – один из механизмов слабого взаимодействия, осуществляемый за счет обмена виртуальными  $Z$ -бозонами между кварками и лептонами без изменения электрического заряда начальных и конечных частиц. Предсказаны в 1973 году А.Саламом, Ш.Глэшоу и С.Вайнбергом, экспериментально подтверждены в 1974 году в ЦЕРНе.

открытие  $W$ - и  $Z$ -бозонов (элементарных частиц – переносчиков слабого взаимодействия), 1983 год. Причем выясняется, что их масса строго соответствует Стандартной модели. Все, физики должны были успокоиться, Стандартная модель работает.

И параллельно возникает третье направление – нейтринная астрофизика. Начинаются поиски нейтрино от Солнца, от звезд, от коллапса сверхновых, возникает идея о том, что во Вселенной существует нейтринное море – нейтрино очень низких энергий, которые образуют некий фон. Начинаются солнечные эксперименты. Один из первых экспериментов как раз велся по реакции, которую предложил Понтекорво: нейтрино падает на хлор, получается аргон. Это эксперимент Дэвиса, который делался в течение 30 лет в Хоумстейке в Америке. И, наконец, возникают подземные лаборатории и первые нейтринные телескопы.

Итак, в этот период наше знание о свойствах нейтрино расширяется до процессов рассеяния, идут исследования в рамках Стандартной модели, нейтрино превращается в инструмент исследования, появляются нейтринные пучки и нейтринные детекторы. Выявляется особая роль нейтрино в мировой картине Вселенной.

Вот такая любопытная картина возникла, если посмотреть начиная с 30-х годов. Появилась гипотеза нейтральных частиц, 1930 год, произошло открытие нейтрона. Квантовая электродинамика была сформулирована, возникла нейтрон-протонная модель ядра. И параллельно начинаются, с одной стороны, экспериментальные исследования, практически не зависящие от теоретиков, а с другой стороны, теоретические исследования. Экспериментальные исследования – бета-распад ядер, элементарных частиц, новые экспериментальные методы – идут начиная с 1930–32 годов и до конца 1956 года. Здесь возникает та самая проблема  $\tau$ – $\theta$ , о которой я рассказывал. Теоретики тоже, как говорится, не дремлют, развивают свои собственные методы, размышления: Ферми придумал феноменологическую теорию бета-распада; возникает гипотеза Майорана, которая еще висит сама по себе, никто ничего не может про нее сказать. Появляется идея о том, что должна быть симметрия по отношению к пространственным преобразованиям, которая как раз здесь и нарушилась. Вот так сошлись теоретическая и экспериментальная физика.

В 1956–58 годы возникает мощный скачок, когда эксперимент нуждается в теории, а теория нуждается в эксперименте. Начинаются опять совершенно независимые процессы, я это подчеркиваю – очень мало влияющие друг на друга: с одной стороны, развитие экспериментальных методов, с другой стороны – развитие теории. Экспериментальные методы – в чистой физике высоких энергий, с астрофизическими объектами. А в плане теории – это структура частиц, Стандартная модель, новые кварки. И к середине 1980-х годов складывается вот такая ситуация: утверждена Стандартная модель и начинается поиск выхода из Стандартной модели. Вопрос – что дальше? Ну нельзя же остановиться, должно быть развитие дальше. Тогда – что? Есть ли что-нибудь вне Стандартной модели? Вот

этот вопрос себе впервые задают физики. Но для того чтобы о нем говорить, я напомним вам, что такое Стандартная модель с сегодняшней точки зрения.

Стандартная модель электрослабого взаимодействия, я буду о ней в основном говорить, с точки зрения математики – своеобразная вещь. Время от времени в физике возникают такие модели, в которых объединяются математика и физика. И это как раз особые точки, когда действительно происходит какой-то взрыв нашего понимания. Стандартная модель с точки зрения математики это так называемая  $SU(2)$ – $U(1)$  симметрия, которая хорошо изучена математиками уже давно, еще с конца прошлого века. С точки зрения физики: существуют лептоны, которые образуют дублеты левых и синглеты правых частиц.<sup>8</sup> Соответственно – для электронных, мюонных и тау-семейств. Вот массы этих частиц: 0,5 МэВ у электрона, 105 МэВ у мюона, 1777 МэВ у тау-частицы. Нейтрино же существуют только левые, никаких правых нейтрино нет в Стандартной модели. Есть ли масса у нейтрино? Вот первый вопрос, который возникает. По Стандартной модели, на этом уровне, нет массы, ноль, нейтрино только левые, и никаких вопросов нет.

У кварков – то же самое, есть дублеты кварков и есть синглеты, есть правые и есть левые. Есть  $u$ - и  $d$ -кварки,  $c$ - и  $s$ -кварки,  $t$ - и  $b$ -кварки. Вот массы кварков на сегодняшний день: от 2–5 МэВ для  $u$ - и  $d$ -кварков до 180 ГэВ у  $t$ -кварков. Они не так давно открыты, кстати. Оказывается (и это первый вопрос к теории), часть этих кварков, а именно  $d$ ,  $s$ ,  $b$ , не сами по себе входят в теорию, а смешиваются. И существует чисто феноменологическая, никак не объясняемая пока матрица Кобаяши–Маскавы, которая описывает эти смешивания. Откуда она взялась, что это такое? Вопрос. Но возникает следующий вопрос: а есть ли смешивание нейтрино?

Дальше. Все взаимодействия в Стандартной модели устроены очень просто. Есть так называемое калибровочное взаимодействие и есть константы, связывающие различные взаимодействия. В нулевом приближении в теории все безмассовое, ничего нет массивного. Затем включается механизм появления массы, так называемый хиггсовский механизм. Источник массы – вот этот бозон Хиггса, который до сих пор не открыт<sup>9</sup>, а дальше часть из этих частиц, в частности бозонов, получает массы. Гамма-квант остается безмассовый, а  $Z$ - и  $W$ -бозоны получают определенную массу. Значит, для того чтобы охарактеризовать эти упомянутые константы, достаточно ввести один экспериментальный угол, угол Вайнберга<sup>10</sup>. При этом впервые в физике возникает некий механизм появления массы. Мы до сих пор не знаем, правильный или неправильный механизм

<sup>8</sup> Частицы с «левой» спиральностью – это те частицы, у которых спин направлен против направления движения частицы. У «правых» спин направлен по движению частицы.

<sup>9</sup> Бозон Хиггса открыт экспериментально в 2012 году (был предсказан британским физиком П. Хиггсом в 1964 году).

<sup>10</sup> Параметр в теории электрослабого взаимодействия, который определяет связь между константами слабого и электромагнитного взаимодействий.

предложен, но, во всяком случае, на том уровне, на котором мы сегодня физику понимаем, этот механизм работает.

Итак, существуют лептоны и кварки, это частицы-фермионы, т.е. частицы с половинным спином. Существуют передатчики калибровочного взаимодействия –  $\gamma$ -кванты,  $W$ - и  $Z$ -бозоны, и взаимодействия происходят универсально: вот у вас летит кварк или лептон, он испускает при взаимодействии один из этих бозонов и переходит в новое состояние. Это схема всех взаимодействий, которые мы сейчас знаем и которые описываются в Стандартной модели. Значит, возникает универсальная взаимосвязь всех полей, т.е. возможно, что есть даже некая общая единая константа, которая постепенно, за счет разных этапов нарушения спонтанной симметрии, переходит в другие, и источником возникновения массы является спонтанное нарушение симметрии вакуума. Вот что сегодня мы знаем.

Какие недостатки у этой теории? Прежде всего, непонятно, как эти поколения образовались, почему у них совершенно разные массы и т.п. Дальше. Какова масса нейтрино? Здесь (в Стандартной модели) она ноль, но, может быть, она не ноль? Почему происходит смешивание этих поколений? И, наконец, откуда взялись вот это нарушение и вот эта константа, которая связана с этими нарушениями (т.е. угол Вайнберга)? Здесь я хочу обратить ваше внимание на очень интересную аналогию между ньютоновской теорией, которую все знают, и Стандартной моделью. В Стандартной модели вы имеете безмассовые частицы, в нулевом приближении. Безмассовые частицы – это вещь, которая описывает геометрию. Не нужно никакой физики, чтобы описать безмассовые частицы. Чистая геометрия, с точки зрения современной высшей геометрии. Точно так же в ньютоновской теории вы имеете инерционное движение – если у вас нет никакого взаимодействия, все выключено, то частицы будут двигаться по инерции по прямым. Но прямые – это опять же чистая геометрия. В основу и той, и другой теорий положена чистая геометрия. А дальше включается физика. В ньютоновской механике включаются силы, и все частицы начинают двигаться по некоторым траекториям, т.е. начинается нарушение геометрии. Точно так же в физике элементарных частиц включаются калибровочные взаимодействия, хиггсовский механизм, и у вас все начинается, возникает физика. Физика отличается от математики тем, что в ней есть нарушение симметрии. Вот такие маленькие размышления...

Ну, теперь мы переходим, делаем шаг, к современной теории, к современной физике. С 1980-х годов теория начинает искать выход из Стандартной модели. Есть два пути, по которым идет теория. Первая идея была связана с Великим объединением. Давайте в Стандартной модели, где у нас была простейшая симметрия, введем все более и более высокие математические симметрии – вместо  $SO(2)$  рассмотрим  $SO(5)$  и т.д. Иными словами, математически будем все более и более расширять поле этих частиц. При этом мы начнем объединять между собой электродинамику с физикой слабого взаимодействия, затем присоединим к

ним сильное взаимодействие, потом добавим гравитацию, и таким образом у нас будет развиваться теория. Вот общая идея теории Великого объединения. Но возможен другой путь – и, скорее всего, по этому пути пошла Природа: а вдруг у нейтрино (именно у нейтрино в данном случае) есть нестандартные свойства? Например, есть майорановское нейтрино, т.е. нейтрино равно антинейтрино. Или у вас есть осцилляции – переход нейтрино электронного и мюонного в тау-нейтрино. Или осцилляции в веществе, которые были придуманы немножко позже. У нейтрино есть магнитный момент, а давайте вводить прецессию этого магнитного момента нейтрино в веществе. И так далее, т.е. второй путь – это путь, связанный с нестандартностью нейтрино.

И как на это начинают отвечать эксперименты? Надо сказать, что очень интересным моментом, связанным с развитием эксперимента, оказался взрыв сверхновой. В 1987 году, специально для физиков, в Большом Магеллановом облаке взорвалась сверхновая. В день Советской Армии, 23 февраля. Именно по этой причине российские физики не все зарегистрировали этот взрыв. Например, в Красноярске под землей был выходной день в честь 23 февраля. И впервые в истории человечества был наблюден взрыв сверхновой не только в световой области, но и в нейтринной области. А именно, было зарегистрировано приблизительно около двух десятков нейтринных вспышек, нейтринных следов в пяти основных детекторах, которые в это время работали на земле. Но даже и здесь возникла очень забавная ситуация, еще одна загадка нейтрино. Все зарегистрировали эти вспышки приблизительно в одно и то же время. Хотя, надо сказать, возникла фантастическая ситуация – у японцев(!) часы сломались. Причем не просто сломались – там на минуту где-то отличие было, хотя все вспышки в секундах считаются. Но, в конце концов, договорились, сдвинули японские часы в нужное место, и вроде все сошлось. Так вот, за пять часов до этой вспышки – это зарегистрировали пять детекторов – было зарегистрировано еще четыре события. Вот это – загадка, которая существует до сих пор, правда в последнее время мы начинаем ее разгадывать. Никто просто в это не верил в течение всех двадцати лет.

Дальше – реакторные нейтрино. К этому времени были померены взаимодействия нейтрино с протонами, с дейтронами, с электронами, измерен магнитный момент нейтрино, и начали искать нейтринные осцилляции в реакторных нейтрино. И, наконец, была придумана совсем интересная вещь. Оказывается, с помощью нейтрино можно диагностировать работу реакторов – на расстоянии 100 м поставить детекторы и смотреть, как работают реакторы. В Иране, например. И сообщать в МАГАТЭ – сегодня они нарабатывают плутоний или не нарабатывают. Это называется нейтринной диагностикой. К сожалению, она пока не реализуется, но принципиально она существует, она возможна.

Дальше – солнечные нейтрино. Первые эксперименты, как я уже говорил, это были эксперименты Дэвиса.

Солнечные нейтрино изучались с помощью хлор-аргонового метода, потом был создан большой детектор Камиоканда в Японии, и было доказано, что существует дефицит нейтрино от Солнца. Этот дефицит потом был подтвержден в экспериментах у нас на Баксане, на детекторе Супер-Камиоканда, и, наконец, в Солнечной нейтринной обсерватории в Канаде.

Дальше – ускорительные нейтрино. Действительно, в ускорителях начали работать с высокими энергиями, и был найден эффект, который до сих пор остается непонятым. В Америке, на ускорителе в Лос-Аламосе, были зарегистрированы необычные нейтринные осцилляции. Есть они или нет – мы до сих пор не знаем. Может быть, это ошибка, может быть – нет. Наконец, в ускорительных нейтрино на больших расстояниях тоже работают с осцилляциями, сегодня это уже становится тривиальностью.

Дальше – атмосферные нейтрино. Нейтрино, которые рождаются в процессах в космических лучах, можно тоже регистрировать, и в 1998–99 годах были найдены осцилляции этих нейтрино. Пока это остается загадкой, хотя идет много исследований по бета-распаду нейтрона. То он влезает в Стандартную модель, то делается следующий эксперимент и оказывается, что там расхождение на несколько сигма<sup>11</sup>. И так до сих пор. До последнего времени мы были уверены, что время жизни нейтрона меряется с точностью одной секунды. А недавно Анатолий Серебров из Ленинграда сделал эксперимент и показал, что у него получилось отличие на 10 секунд.

Ну и, наконец, – масса нейтрино. Еще Понтекорво предложил использовать тритий, для того чтобы измерить массу нейтрино. Сейчас эти эксперименты ведутся, и они позволили нам сказать, что масса электронного нейтрино, которое вылетает из трития, во всяком случае меньше чем 2 эВ. Что тоже неплохо.

Я заканчиваю свой рассказ об истории развития наших представлений о нейтрино. Как видите, очень много нового и неожиданного, много ключевых для физики идей принесла эта область. Я думаю, что именно в ней нам и в будущем следует ждать сюрпризов, новых идей и поворотных моментов в развитии физики.

#### Именной комментарий

(расположение – по мере упоминания в тексте статьи)

*Чжэндао Ли* (род. в 1926 г.) – китайский и американский физик. Лауреат Нобелевской премии по физике (совместно с Ч.Янгом) «за пристальное изучение так называемых законов четности, которое привело к важным открытиям в области элементарных частиц» за 1957 год.

*Чжэньнин Янг* (род. в 1922 году) – китайский и американский физик. Лауреат Нобелевской премии по физике (совместно с Ч.Ли) за 1957 год.

*Цзяньсюн Ву* (1912–1997) – американский физик китайского происхождения, поставила знаменитый «эксперимент Ву», доказавший несохранение пространственной четности в слабых взаимодействиях.

*Владимир Михайлович Лобашёв* (1934–2011) – советский и российский физик-ядерщик.

*Юрий Георгиевич Абов* (род. в 1922 г.) – советский и российский физик, открыватель слабого взаимодействия нуклонов в ядрах.

*Ричард Филлипс Фейнман* (1918–1988) – выдающийся американский ученый, один из авторов знаменитых «Фейнмановских лекций по физике», прекрасный популяризатор науки. Лауреат Нобелевской премии по физике (совместно с С.Томоногой и Дж.Швингером) за 1965 год.

*Раймонд Дэвис младший* (1914–2006) – американский химик и физик. Лауреат Нобелевской премии по физике «за создание нейтринной астрономии» за 2002 год.

*Стивен Вайнберг* (род. в 1933 г.) – американский физик. Угол Вайнберга – один из параметров теории электрослабого взаимодействия Глэшоу–Вайнберга–Салама. Лауреат Нобелевской премии по физике (совместно с Ш.Глэшоу и А.Саламом) за 1979 год.

*Питер Уэйр Хиггс* (род. в 1929 г.) – британский физик-теоретик, член Лондонского Королевского общества. В 1960-е годы предсказал существование новой элементарной частицы, называемой теперь бозоном Хиггса. Лауреат Нобелевской премии по физике (совместно с Ф.Энгле-ром) за 2013 год.

*Анатолий Павлович Серебров* (род. в 1944 г.) – российский физик, специалист в области исследования фундаментальных взаимодействий и нейтронной физики.

#### Рекомендуемая литература

1. История уравнения Дирака и связанные с ним представления и события физики тех лет описаны самим П. Дираком в статье «Релятивистское волновое уравнение электрона» (Успехи физических наук, 1979, т. 129, в. 4, с. 681–691). В русском переводе статья доступна в интернете по адресу: [http://ufn.ru/ufn79/ufn79\\_8/Russian/r798e.pdf](http://ufn.ru/ufn79/ufn79_8/Russian/r798e.pdf)

2. Об истории гипотезы Ландау о существовании «плотных звезд», которую можно рассматривать как первое предсказание нейтронных звезд (сделанное до открытия нейтрона), можно прочитать в статье Д.Г.Яковлева, П.Хэнселя, Г.Бейма и К.Петика «Л.Д.Ландау и концепция нейтронных звезд» (Успехи физических наук, 2013, т. 183, в. 3, с. 307–314). Адрес статьи в интернете: <http://ufn.ru/ru/articles/2013/3/f/>

3. Гипотеза Майорана подробно обсуждается в статье самого Э.Майорана «Симметричная теория электрона и позитрона» (Физика элементарных частиц и атомного ядра, 2003, т. 34, в. 1, с. 242–256), а также в статье Ю.В.Гапонова «Начало майорановской физики. Памяти Э.Майораны» (там же, с. 240–241). Обе статьи доступны в интернете по адресам: <http://www1.jinr.ru/Archive/Pepan/v-34-1/7.htm>; <http://www1.jinr.ru/Archive/Pepan/v-34-1/v-34-1-6.pdf>

4. Об эволюции Вселенной, супергравитации и суперструнах, о квантовой хромодинамике, попытках построения единой теории поля и их создателях прекрасно написано в популярной книге Барри Паркера «Мечта Эйнштейна. В поисках единой теории строения Вселенной» (М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1991, перевод с английского В.И. и О.И.Мацарских, под редакцией Я.А.Смординского). Адрес книги в интернете: <http://www.ega-math.narod.ru/Reid/Parker.htm>

<sup>11</sup> Сигма ( $\sigma$ ) – величина стандартной ошибки измерения.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3-2014» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2341» или «Ф2348». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача M2345 предлагалась на XII Устной олимпиаде по геометрии, задача M2346 – на VII Южном математическом турнире, задача M2348 – на XVII Кубке памяти А.Н.Колмогорова.

## Задачи M2341–M2348, Ф2348–Ф2354

**M2341.** На сторонах  $BC$  и  $AC$  треугольника выбирают точки  $M$  и  $N$  соответственно. Отрезки  $AM$  и  $BN$  делят треугольник на четыре части. Пусть  $s$  – наименьшая из площадей этих частей, а  $S$  – наибольшая. Найдите наибольшее возможное значение отношения  $s/S$ .

И.Акулич

**M2342.** Рассматриваются слова, состоящие из букв  $A$  и  $B$ . Найдите наименьшее  $n$ , удовлетворяющее следующему условию: в любом слове длины  $n$  найдутся два идущих подряд одинаковых подслова длины больше 1.

А.Спивак

**M2343.** На окружности длины 1 отмечены  $m$  красных точек – вершин некоторого правильного  $m$ -угольника и  $n$  синих точек – вершин некоторого правильного  $n$ -угольника. Найдите наибольшее возможное значение минимальной длины дуги, два конца которой – красная и синяя точки.

В.Шарич

**M2344.** Натуральное число  $n$  назовем *правильным*, если для любого 100-значного натурального числа  $a$  верно следующее утверждение: число  $a^n$  (в десятичной записи) оканчивается на  $a$  тогда и только тогда, когда  $a^2$  оканчивается на  $a$ . Найдите все правильные числа.

В.Сендеров

**M2345.** Отрезок  $AD$  – диаметр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне  $BC$ , которая пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно (рис.1).

Докажите, что периметр треугольника  $DEF$  в два раза больше стороны  $BC$ .

Д.Прокопенко

**M2346.** Для изображения множеств часто рисуют так называемые *круги Эйлера*. Например, на рисунке 2 изображены три выпуклые фигуры  $A, B, C$ , границы которых делят плоскость на области так, что для любого подмножества фигур есть область, принадлежащая в точности фигурам из этого подмножества. Выясните, можно ли для каждого натурального  $n > 3$  нарисовать аналогичную диаграмму, иллюстрирующую пересечение  $n$  подмножеств. Иначе говоря, при каких  $n > 3$  на плоскости существует множество выпуклых фигур  $M_1, \dots, M_n$  такое, что для любого

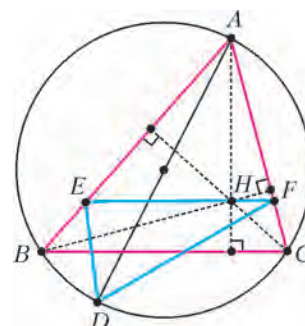


Рис. 1

непустого подмножества  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$  найдется точка, которая лежит внутри  $M_i$  при  $i \in S$  и вне  $M_i$  при  $i \notin S$ ?

П.Кожевников

**M2347.** В каждой граничной клетке таблицы  $2013 \times 2013$  поставили по целому числу. Докажите, что можно заполнить все остальные клетки целыми

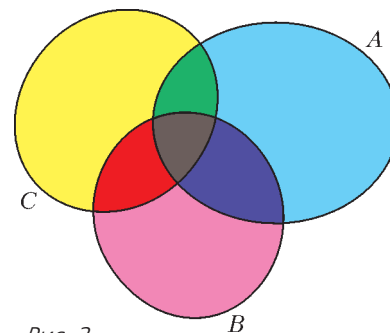


Рис. 2

числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате  $3 \times 3$ , содержащемся в таблице, была равна нулю.

*Д.Храмцов*

**M2348.** Для чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  обозначим

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{1}{x_1 - \frac{1}{x_2 - \frac{1}{x_3 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{x_n}}}}}$$

Пусть  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n$  – натуральные числа, не меньшие 2, для которых  $[a_1, \dots, a_k] + [b_1, \dots, b_n] > 1$ . Докажите, что найдутся такие натуральные числа  $p \leq k$  и  $q \leq n$ , что  $[a_1, \dots, a_p] + [b_1, \dots, b_q] = 1$ .

*А.Устинов*

**Ф2348.** На однородную шероховатую горизонтальную поверхность неподвижной доски массой  $M$  и длиной  $L$  попал двигавшийся горизонтально и поступательно плоский маленький брусок, который проскользил поступательно вдоль всей доски и съехал с нее. Доска находилась на гладкой горизонтальной поверхности. С каким ускорением двигалась поступательно доска, если за время скольжения по ней бруска выделилось количество теплоты  $Q$ ?

*А.Шеронов*

**Ф2349.** Четыре гладких тонких стержня закреплены неподвижно (рис. 3). Два из них параллельны друг

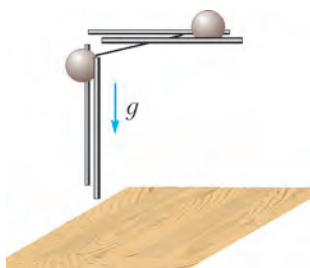


Рис. 3

другу и горизонтальны, а два других параллельны друг другу и вертикальны. Два одинаковых маленьких шарика соединены невесомой нерастяжимой нитью длиной  $L$ . Диаметры шариков больше расстояний между параллельными стержнями. В начальный момент шарики удерживают так, что они неподвижны, нить

при этом выпрямлена и почти горизонтальна. После отпускания шарика пришли в движение и ударились о горизонтальный пол одновременно. Каково минимальное расстояние  $H$  от горизонтальных стержней до пола? Какими были при таком расстоянии скорости шариков за мгновение до их ударов о пол?

*С.Дмитриев*

**Ф2350.** Сосуд с жесткими стенками заполнен несжимаемой жидкостью плотностью  $\rho$ . Внутренность сосуда имеет форму шара радиусом  $R$ . Декартовы оси координат выбранной инерциальной системы отсчета таковы, что ускорение свободного падения  $\vec{g}$  имеет координаты  $0, 0, -g$ . Сосуд движется поступательно с ускорением  $\vec{a}$ . Все проекции ускорения  $a_x, a_y, a_z$  положительны. Минимальное давление жидкости внутри сосуда равно  $p_{\min}$ . Каково максимальное давление жидкости внутри сосуда? Найдите ответ на этот же вопрос в случае, когда внутренность заполненного жидкостью

сосуда имеет форму куба с длиной ребра  $A$ , причем каждое ребро параллельно одной из осей координат.

*Б.Паскаль*

**Ф2351.** В неподвижной горизонтальной цилиндрической трубе с жесткими и не проводящими тепло стенками находится газообразный гелий. Температура газа очень мала (например, порядка  $0,1$  К). Концентрация молекул газа  $n_0$  значительно меньше величины  $D^{-3}$ , где  $D$  – характерный размер молекул гелия. Внезапно поршень, перекрывающий трубу, приходит в движение вдоль оси симметрии трубы с большой постоянной скоростью  $v$  (равной, например,  $3$  км/с). Какой будет температура газа  $T$  перед поршнем? Какое давление  $p$  будет оказывать газ на поршень? С какой скоростью  $u$  будет удаляться от поршня граница раздела между областью, занятой газом при низкой температуре, и областью, где молекулы двигаются с упорядоченной скоростью, равной  $v$ ? Какой будет концентрация  $n$  молекул вблизи поршня?

*В.Сергеев*

**Ф2352.** Один моль гелия нагревался от начальной температуры  $T_0 = 200$  К в процессе с молярной теплоемкостью, которая зависела от абсолютной температуры  $T$  по закону  $C(T) = RT/T_0$ . (Здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная.) При достижении некоторой температуры работа, которую совершил газ, оказалась равной нулю. На этом процесс завершился. Какую работу совершил газ на участке процесса, когда он расширялся? Найдите отношение объема газа в конечной точке процесса к его начальному объему при температуре  $T_0$ .

*А.Шеронов*

**Ф2353.** Два маятника имеют одинаковые длины легких нерастяжимых нитей, концы которых прикреплены к потолку, и одинаковые маленькие грузы на концах нитей. Грузы отвели от положения равновесия, сохраняя натянутость нитей, при этом нити составили одинаковые углы с вертикалью. Один из грузов толкнули в горизонтальном направлении, перпендикулярном нити, к которой этот груз прикреплен, и одновременно отпустили без начальной скорости второй груз. Трения в системе нет. Нить первого маятника в процессе движения всегда составляет с вертикалью один и тот же угол. Оказалось, что эти два маятника одновременно попадают каждый в свое начальное положение после того, как пройдет время, равное  $100$  периодам колебаний первого маятника и  $101$  периоду колебаний второго маятника. На какой угол были отклонены нити от вертикали в начальный момент? Период математического маятника длиной  $L$  в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения  $g$  при малом значении максимального угла отклонения от положения равновесия  $\alpha$  ( $\alpha < 1$ ) хорошо описывается формулой

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right), \text{ где } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

*Фольклор*

**Ф2354.** Толстостенный светонепроницаемый ящик установлен под открытым небом в пасмурный день, когда

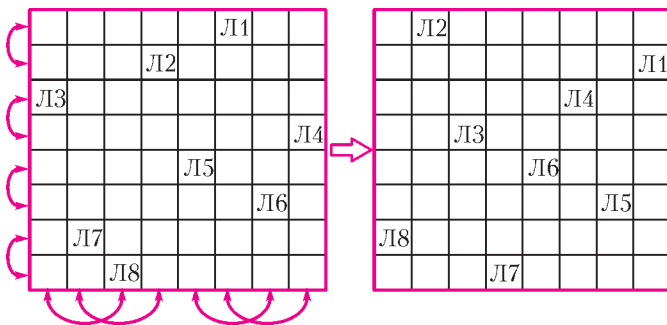
все небо одинаково светлое и солнца не видно. В его верхней стенке (крышке) просверлено вертикальное отверстие, и через него в ящик пропущен длинный однородный прозрачный цилиндр (световод) круглого сечения радиусом  $r = 1$  см. Стенки цилиндра гладкие, они не касаются стенок дырки, покрашенных в черный цвет. Верхний торец световода находится снаружи, а нижний – внутри ящика. Под торцом цилиндра на горизонтальном дне ящика лежит плоский экран. Расстояние от нижнего торца цилиндра до экрана  $L = 1 \text{ м} \gg r$ . На экране наблюдается светлое пятно радиусом  $R = 1$  м. С какой скоростью распространяется свет в материале, из которого сделан цилиндр?

Е.Уусталу

**Решения задач М2326–М2333, Ф2333–Ф2339**

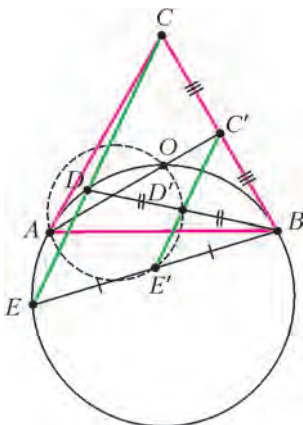
**М2326.** На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются «одновременно», т.е. если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно менять местами.)

Ладью из первой строки переставим во вторую строку, из второй – в первую. Аналогично обойдемся с ладьями из третьей и четвертой, пятой и шестой, седьмой и восьмой строк. Ладью из первого столбца переставим в третий, из третьего – в первый. Аналогично обойдем-



ся с ладьями из второго и четвертого, пятого и седьмого, шестого и восьмого столбцов. (Пример такой перестановки показан на рисунке.) Тогда каждая ладья будет переставлена ходом коня, и в каждой строке и столбце будет по ладье, так что они не будут бить друг друга.

Е.Бакаев



**М2327.** Дан правильный треугольник  $ABC$  с центром  $O$ . Прямая, проходящая через вершину  $C$ , пересекает описанную окружность треугольника  $AOB$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $O$  и середины отрезков  $BD$ ,  $BE$  лежат на одной окружности.

Пусть  $C', D', E'$  – середины отрезков  $BC, BD, BE$  соответственно. Пусть для определенности точка  $D$  лежит между  $C$  и  $E$  (см. рисунок). Тогда точка  $D'$  лежит на средней линии  $C'E'$  треугольника  $CBE$ . В правильном треугольнике  $ABC$  вершина  $A$ , центр  $O$  и точка  $C'$  также лежат на одной прямой. Угол  $ABC$  равен половине дуги  $AOB$ , поэтому  $BC$  – касательная. Тогда

$$C'E' \cdot C'D' = \frac{1}{4} CE \cdot CD = \frac{1}{4} CB^2 = C'B^2 = C'O \cdot C'A.$$

Из равенства  $C'E' \cdot C'D' = C'O \cdot C'A$  по теореме, обратной к теореме о произведении отрезков секущих, и следует вписанность четырехугольника  $AOD'E'$ .

А.Заславский

**М2328.** Каждое ли целое число можно представить в виде суммы кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

**Ответ.** Да, каждое.

Заметим, что

$$(n+7)^3 - (n+6)^3 - (n+5)^3 + (n+4)^3 - (n+3)^3 + (n+2)^3 + (n+1)^3 - n^3 = 48.$$

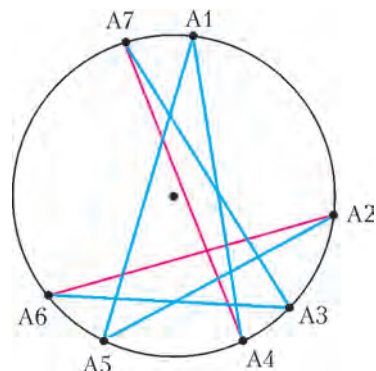
С другой стороны, число  $(48k+1)^3$  при любом  $k$  дает при делении на 48 остаток 1. Складывая несколько различных кубов такого вида, мы можем получить сумму с любым наперед заданным остатком от деления на 48, а потом, прибавляя или вычитая нужное количество раз указанные выше комбинации, равные 48 (ясно, что выбирать  $n$  можно так, чтобы все кубы, которые встречаются в сумме, были различными), получить любое число с таким остатком.

**Комментарий.** Известно (это частный случай проблемы Варинга), что каждое целое число представимо в виде суммы не более девяти точных кубов. Но поскольку некоторые из этих кубов могут оказаться равными, задача М2328 сразу не вытекает из этого факта.

И.Рубанов, А.Семенов, А.Шаповалов, Л.Медников

**М2329.** В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадет на сторону (а не на ее продолжение).

Докажем утверждение задачи для произвольного вписанного  $(2n+1)$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$ . Проведем все большие диагонали  $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \dots$  (мы считаем,



что  $A_{2n+2} = A_1, A_{2n+3} = A_2, \dots$ ). Получится «звезда» с  $2n + 1$  ребрами. Окрасим диагональ  $A_k A_{k+n}$  в синий цвет, если дуга  $A_k A_{k+1} A_{k+n}$  меньше половины окружности (т.е. угол, на нее опирающийся, – острый), и в красный цвет в противном случае. Обойдем «звезду» по ребрам (на рисунке показан пример для семиугольника). Заметим, что два красных ребра не могут идти подряд, так как сумма двух соответствующих им дуг меньше полной окружности. Чередоваться цвета не могут из-за нечетности числа  $2n + 1$ . Значит, найдутся две синие диагонали, идущие подряд. Пусть это, например, диагонали  $A_{n+2}A_1$  и  $A_1A_{n+1}$ . Тогда в треугольнике  $A_{n+2}A_1A_{n+1}$  углы  $A_1A_{n+2}A_{n+1}$  и  $A_1A_{n+1}A_{n+2}$  – острые, следовательно, высота, опущенная из вершины  $A_1$ , попадает на противоположную сторону  $A_{n+1}A_{n+2}$ .

*И.Рубанов, А.Семенов, А.Шаповалов, Л.Медников*

**M2330.** а) Докажите, что существует ровно одна бесконечная влево последовательность цифр  $A = \dots 625$ , обладающая свойством: при возведении в квадрат числа, оканчивающегося на  $k$  последних цифр последовательности  $A$ , получается тоже число, оканчивающееся на  $k$  последних цифр последовательности  $A$ .

б) Докажите, что эта последовательность неперiodична.

Пусть последние  $n$  цифр образуют  $n$ -значное число  $x_n$  (здесь допускаем, чтобы число начиналось с нуля), причем  $x_1 = 5$ .

а) Условие задачи означает, что число  $x_n^2 - x_n = x_n(x_n - 1)$  должно делиться на  $10^n$ . Поскольку  $x_n$  делится на 5 и нечетно, это означает, что  $x_n$  должно делиться на  $5^n$ , а  $(x_n - 1)$  – на  $2^n$ . Положим  $x_n = 5^n t_n$ ,  $x_n - 1 = 2^n s_n$ . Число  $x_{n+1}$  получается из  $x_n$  приписыванием слева некоторой цифры  $c$ :  $x_{n+1} = c \cdot 10^n + x_n$ . Условие  $x_{n+1} : 5^{n+1}$  эквивалентно тому, что  $2^n c + t_n : 5$ . Зная остатки от деления чисел  $2^n$  и  $t_n$  на 5, однозначно определяется остаток  $c$  при делении на 5. Аналогично,  $x_{n+1} - 1 : 2^{n+1} \Leftrightarrow 5^n c + s_n - 1 : 2$ , поэтому четность числа  $c$  противоположна четности числа  $s_n$ . Таким образом, по числу  $x_n$  цифра  $c$  определяется, причем единственным образом.

б) Предположим, что последовательность периодична, пусть  $A$  – период длины  $k$ ,  $B$  – предпериод длины  $n$  ( $0 \leq B < 10^n - 1$  при  $n > 0$ ; в случае, когда предпериод отсутствует, считаем, что  $n = 0, B = 0$ ).

Положим  $N = km + n$ . Тогда

$$\begin{aligned} x_N &= \overbrace{AA \dots A}^m B = \\ &= B + A(10^n + 10^{n+k} + \dots + 10^{n+(m-1)k}) = \\ &= B + 10^n A \frac{10^{km} - 1}{10^k - 1} = \left( B - \frac{10^n A}{10^k - 1} \right) + \frac{10^N A}{10^k - 1}. \end{aligned}$$

Положив  $q = 10^k - 1, p = (10^k - 1)B - 10^n A$ , имеем

$$x_N = \frac{p}{q} + \frac{10^N A}{q}, \quad qx_N = p + 10^N A. \text{ Так как } x_N^2 -$$

$$- x_N : 10^N, \text{ то } (qx_N)^2 - q(qx_N) : 10^N \Rightarrow p^2 - qp : 10^N.$$

Последнее выполнено при  $N = km + n$  для всех  $m$ , в то время как  $p$  и  $q$  не зависят от  $m$ , значит,  $p^2 - pq = 0$ , откуда  $p = 0$  или  $p = q$ .

Если  $p = 0$ , то  $(10^k - 1)B = 10^n A$ . Правая часть равенства положительна, поэтому  $B > 0$ . Но так как  $\text{НОД}(10^k - 1, 10) = 1$ , то  $B : 10^n \Rightarrow B \geq 10^n$  – противоречие. Если же  $p = q$ , то  $(10^k - 1)(B - 1) = 10^n A$ , и из этого равенства получаем аналогичное противоречие.

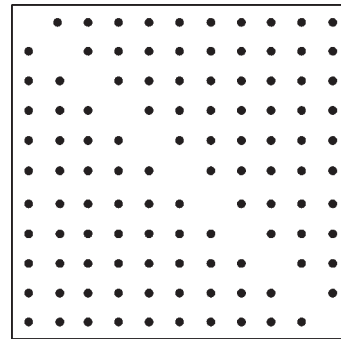
*Замечание.* Задачу б) можно интерпретировать на языке высшей алгебры так: в кольце 10-адических чисел нет нетривиальных рациональных решений уравнения  $x^2 = x$ .

*А.Канель-Белов*

**M2331\*.** Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежат 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берет 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучки, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

**Ответ.** Вася.

Расположим камни, как показано на рисунке, где кучки соответствуют столбцам. Петя должен брать несколько



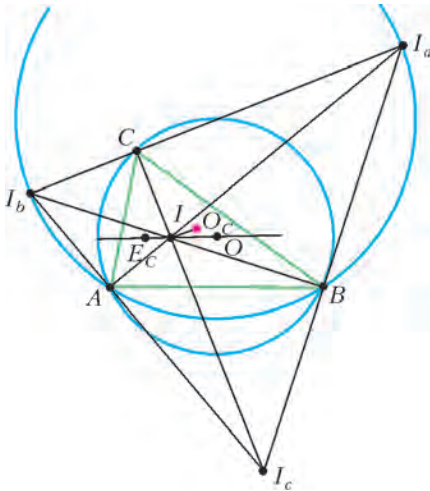
камней из одного столбца, а Вася – из разных. Стратегия Васи – делать ходы, симметричные Петиным относительно пустой диагонали. Изначально картинка симметрична. Поскольку строка, симметричная столбцу, не имеет с ним общих камней, то Вася каждый раз сможет восстанавливать нарушенную симметрию, т.е. у него всегда есть ход. Так как игра конечна, то когда-то Петя проиграет.

*Е.Бакаев*

**M2332\*.** Пусть точки  $I$  и  $O$  – центры вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$  соответственно. Пусть  $O_C$  – центр окружности, проходящей через основания высот треугольника  $A_1B_1$  (т.е. окружности девяти точек треугольника  $A_1B_1C_1$ ). Пусть  $E_C$  – точка, симметричная точке  $O_C$  относительно биссектрисы угла  $A_1B_1C_1$ . Определим точки  $E_A$  и  $E_B$  аналогичным образом. Докажите, что точки  $E_A, E_B$  и  $E_C$  лежат на прямой  $OI$ .



Пусть точки  $I_a, I_b, I_c$  – центры внеписанных окружностей, касающихся сторон  $BC, CA, AB$  соответственно (см. рисунок). Так как прямые  $CI_c$  и  $I_aI_b$  –



биссектрисы внутреннего и внешнего угла  $ACB$ , то прямая  $I_cC$  – высота в треугольнике  $I_aI_bI_c$ . Аналогично, прямые  $I_aA$  и  $I_bB$  являются его высотами. Поэтому треугольник  $ABC$  является ортотреугольником (т.е. треугольником с вершинами в основаниях высот) треугольника  $I_aI_bI_c$ . Так как точка  $I$  является ортоцентром треугольника  $I_aI_bI_c$ , то треугольник  $ABC$  является также ортотреугольником треугольника  $I_aI_bI_c$ .

Заметим, что точки  $A, B, I_a, I_b$  лежат на одной окружности (с диаметром  $I_aI_b$ ), поэтому треугольники  $I_aI_b$  и  $IAB$  совмещаются преобразованием подобия – симметрией относительно биссектрисы угла  $AIB$  с последующей гомотетией с центром  $I$ . Следовательно, окружность  $(ABC)$  (описанная около ортотреугольника треугольника  $I_aI_bI_c$ ) и окружность, описанная около ортотреугольника треугольника  $IAB$ , совмещаются тем же преобразованием подобия. Значит, и их центры  $O$  и  $O_c$ , и лучи  $IO_c$  и  $IO$  переводятся друг в друга этим же преобразованием. Следовательно, точка  $E_c$  лежит на прямой  $IO$ .

Аналогично, точки  $E_A$  и  $E_B$  лежат на прямой  $IO$ .

С.Ильясов

**M2333\***. Граф – это конечное множество вершин, некоторые пары вершин соединены ребрами. Говорят, что граф правильно раскрашен в  $t$  цветов, если каждой из его вершин приписан один из  $t$  данных цветов так, что любые две вершины, соединенные ребром, окрашены в разные цвета. Вершины некоторого графа разбиты на три множества  $A, B, C$  так, что вершины из множества  $A$  не связаны ребрами с вершинами из множества  $C$ . Известно, что если удалить из графа все вершины множества  $C$  (вместе с выходящими ребрами), то полученный граф можно правильно раскрасить в  $k$  цветов, а если удалить из него все вершины множества  $A$  – то в  $n$  цветов. В какое минимальное количество цветов можно с гарантией правильно раскрасить такой граф?

**Ответ.**  $k + n - 1$ .

Покажем, что в  $k + n - 1$  цвет правильно раскрасить все вершины можно всегда. Раскрасим  $B \cup C$  в  $n$  цветов, назовем один из этих цветов *первым*, и пусть  $D$  – совокупность всех вершин из  $B$ , покрашенных в первый цвет. Теперь раскрасим  $A \cup D$  в  $k$  цветов (при этом вершины из множества  $D$  перекрашиваем), используя в качестве одного из них первый цвет (а остальные  $k - 1$  цветов взяв отличными от уже использованных  $n$  цветов). У вершин, не входящих в  $A \cup D$ , сохраним прежнюю раскраску. Поскольку никакие вершины из  $A \cup D$  не связаны ребрами с вершинами из  $C$ , покрашенными в первый цвет (из  $D$  – в силу правильности раскраски  $B \cup C$  в  $n$  цветов, из  $A$  – по условию), получится правильная раскраска графа в  $k + n - 1$  цвет.

Теперь покажем, что меньшего числа цветов может и не хватить. Расположим  $kn$  точек в виде прямоугольника из  $n$  строк и  $k$  столбцов. Примем это множество за  $B$ . Снизу добавим нулевую строку из  $k$  точек, примем ее за  $A$ , слева добавим нулевой столбец, примем его за  $C$ . Ребрами в  $B$  соединим любые две точки, не лежащие ни в одной строке, ни в одном столбце. В  $A$  соединим ребрами каждые две точки, в  $C$  – тоже. Кроме того, соединим ребрами каждую точку из  $A$  со всеми точками из  $B$ , не лежащими с ней в одном столбце, и каждую точку из  $C$  со всеми точками из  $B$ , не лежащими с ней в одной строке. Очевидны правильные раскраски  $A \cup B$  в  $k$  цветов (по столбцам) и  $C \cup B$  в  $n$  цветов (по строкам). Покажем, что полученный граф нельзя раскрасить меньше чем в  $k + n - 1$  цвет.

Допустим, есть правильная раскраска  $A \cup B \cup C$  в  $k + n - 2$  цвета. Поскольку точки множества  $A$  раскрашены в  $k$  различных цветов, а точки множества  $C$  – в  $n$  различных цветов, то имеются  $m \geq 2$  цветов (назовем их *общими*), в которые покрашены точки обоих этих множеств. Отметим строки и столбцы, в которых находятся такие точки; на их пересечении находится  $m^2$  точек множества  $B$ . Заметим, что в каждый из  $m$  общих цветов может быть покрашено не больше одной из этих  $m^2$  точек, а именно, точка, стоящая на пересечении соответствующих столбца и строки. Стало быть, среди этих  $m^2$  точек есть  $m^2 - m$  точек, раскрашенных в другие цвета. Это не могут быть общие цвета, но не могут быть и другие цвета, использованные при раскраске точек множеств  $A$  и  $C$ , потому что со всеми точками таких цветов точки из отмеченных строк и столбцов связаны ребрами. Всего при раскраске точек из  $A$  и  $C$  было использовано  $k + n - m$  цветов. Из упомянутых выше  $m^2 - m$  точек можно выбрать  $m$  точек, никакие две из которых не лежат в одной строке или одном столбце. Каждые две из этих  $m$  точек связаны ребром, поэтому они раскрашены не менее чем в  $m$  цветов. Получается, что всего использовано не менее  $k + n$  цветов. Противоречие.

И.Богданов

**Ф2333.** Приятели Вася и Петя по утрам гуляют в парке. Однажды вместе с Петей на прогулку вышел и его пес Шарик. Вот Вася, не торопясь, бежит трусцой по прямой дорожке навстречу Пете со скоростью  $v = 2$  м/с, а Петя идет с Шариком навстречу Васе со скоростью  $u = 1$  м/с. Ровно в 12:00:00 Петя увидел Васю, который в этот момент был от него на расстоянии  $L = 300$  м. Он тут же отпустил Шарика, и тот со всех ног со скоростью  $3(u + v) = 9$  м/с бросился бежать к товарищу своего хозяина. Шарик, добежав до Васи, некоторое время идет рядом с ним, а затем бросается к своему хозяину. Добежав до него и пройдясь немного рядом с Петей, он снова бежит к Васе, и так повторяется несколько раз. За время сближения приятелей Шарик провел возле каждого из них одно и то же время. Общая длина пути, который успел пройти и пробежать пес, равна  $2,5L = 750$  м. Какую часть промежутка времени от 12:00:00 до 12:01:40 Шарик бежал со скоростью 9 м/с? Скорости приятелей не изменялись.

Обозначим через  $\tau$  время, которое Шарик находился рядом с каждым из мальчиков. Тогда, двигаясь вместе с ними, он прошел часть пути, равную

$$L_1 = \tau(v + u).$$

Все остальное время

$$t = \frac{L}{u + v} - 2\tau$$

он бегал со скоростью  $V = 3(u + v)$  и за это время «набегал» расстояние

$$L_2 = tV.$$

Из условия известно, что

$$L_1 + L_2 = 2,5L \text{ и } V = 3(u + v).$$

Отсюда получаем

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{L}{2V - u - v} = 10 \text{ с.}$$

Со скоростью 9 м/с шарик бежал все оставшееся время, т.е.  $100 \text{ с} - 2 \cdot 10 \text{ с} = 80 \text{ с}$ .

А.Власов

**Ф2334.** Два сообщающихся цилиндрических сосуда высотой  $5h$ , частично заполненные жидкостью плотностью  $\rho$  до высот  $4h$  и  $2h$  соответственно, смещены по вертикали на высоту  $2h$  (рис.1). Кран в трубке изначально закрыт. В правый сосуд добавляют жидкости плотностью  $0,8\rho$  столько, что она занимает объем высотой  $3h$ . Какой по высоте столб жидкости плотностью  $0,8\rho$  останется в правом сосуде после того, как

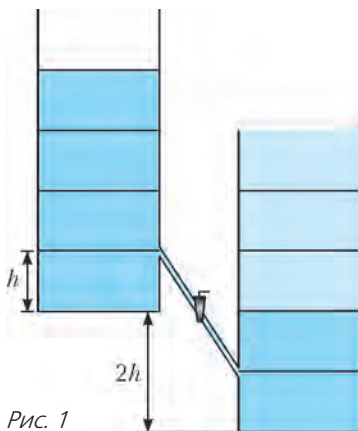


Рис. 1

кран откроют и установится равновесие? Сверху все сосуды открыты. Объемом соединительной трубки можно пренебречь. Площади горизонтальных поперечных сечений сосудов одинаковые.

Так как жидкости несжимаемы, после открытия крана в левом сосуде столб жидкости плотностью  $\rho$  понизится на  $x$ , а в правом поднимется на  $x$  (рис.2). Запишем условие равновесия, приравняв давления в точках 1 и 2:

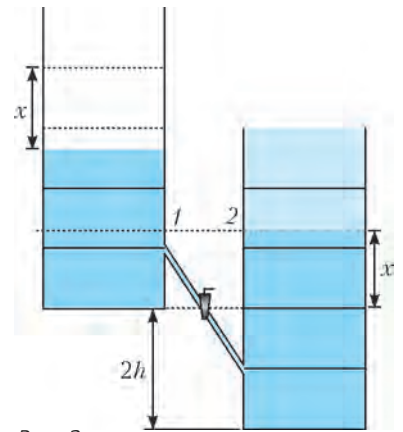


Рис. 2

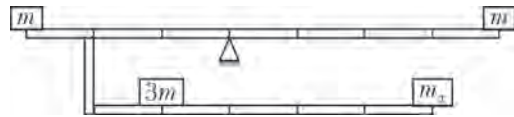
$$\rho g(4h - 2x) = 0,8\rho g(3h - x),$$

откуда находим  $x = 4h/3$ . Следовательно, жидкости плотностью  $0,8\rho$  останется столб высотой

$$H = 3h - \frac{4}{3}h = \frac{5}{3}h.$$

М.Замятнин

**Ф2335.** На легком жестком двухъярусном рычаге сложной конструкции уравновешены 4 груза (см. рисунок). Найдите массу груза  $m_x$ , если массы трех



остальных грузов известны;  $m = 6$  кг. Длины частей рычага заданы на рисунке.

Несмотря на сложную конструкцию рычага, для всей системы можно воспользоваться правилом моментов. Будем вычислять моменты сил относительно точки опоры рычага. Тогда получим

$$mg \cdot 3L + 3mg \cdot L = mg \cdot 4L + m_x g \cdot 3L,$$

откуда найдем

$$m_x = \frac{2}{3}m = 4 \text{ кг.}$$

З.Михайлов

**Ф2336.** На рисунке 1 представлена (в относительных единицах) зависимость объема порции воздуха массой  $m = 10$  г от его температуры (это примерно шестая часть окружности единичного радиуса). Найдите максимальное давление  $p_{\max}$ , которого достигал воздух в процессе нагревания, если  $V_0 = 1$  л, а  $T_0 = 300$  К. В этой задаче воздух можно считать идеальным газом.

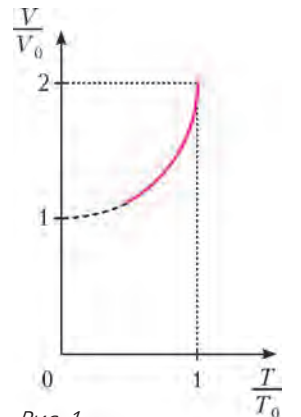


Рис. 1

Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$pV = \nu RT, \text{ или } \frac{V}{V_0} = \frac{\nu RT_0}{pV_0} \frac{T}{T_0}.$$

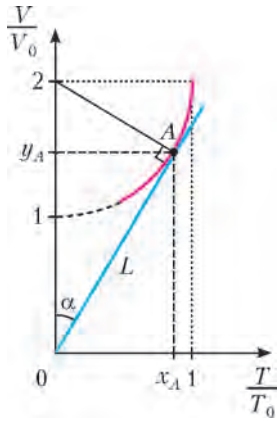


Рис. 2

Видно, что процесс с постоянным давлением (изобарический) в заданных координатах представляет из себя прямую, проходящую через начало координат. Причем чем больше давление, тем больше угол  $\alpha$ . Таким образом, точку, в которой давление было максимально, можно найти, проведя касательную из начала координат к графику процесса (точка A на рисунке 2). Поскольку радиус окружности единичный,  $\sin \alpha = 1/2$ ; значит,  $\alpha = 30^\circ$  и

$$L = 2 \cos \alpha = \sqrt{3},$$

$$x_A = L \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_A = L \cos \alpha = \frac{3}{2}.$$

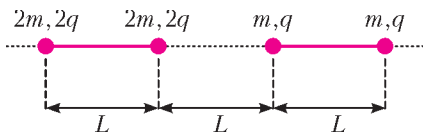
Зная координаты точки на графике, найдем максимальное давление:

$$p_{\max} = \frac{m}{M} R \frac{x_A T_0}{y_A V_0} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

где  $M = 29 \text{ г/моль}$  – молярная масса воздуха.

А.Бычков

**Ф2337.** Вдоль одной прямой расположены две пары скрепленных зарядов. Величины зарядов и их массы указаны на рисунке. С какими ускорениями начнут разлетаться эти пары? Какие скорости они приобретут после разлета на большое расстояние? Считайте движение пар зарядов поступательным. Расстояние  $L$ , заряд  $q$  и масса  $m$  заданы.



разлетаться эти пары? Какие скорости они приобретут после разлета на большое расстояние? Считайте движение пар зарядов поступательным. Расстояние  $L$ , заряд  $q$  и масса  $m$  заданы.

Запишем для правой пары зарядов второй закон Ньютона:

$$2kq^2 \left( \frac{1}{L^2} + \frac{2}{(2L)^2} + \frac{1}{(3L)^2} \right) = 2ma_1,$$

где  $a_1$  – ускорение этой пары. Отсюда находим

$$a_1 = \frac{29}{18} \frac{kq^2}{mL^2}.$$

По третьему закону Ньютона, на левую пару зарядов со стороны правой действует такая же по величине сила. Однако масса левой пары в два раза больше, поэтому ее ускорение будет равно

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{29}{36} \frac{kq^2}{mL^2}.$$

Так как система замкнута, можно воспользоваться законами сохранения импульса и энергии, причем энергию взаимодействия зарядов внутри пары не будем учитывать, так как она не изменится:

$$0 = 2mu_1 - 2 \cdot 2mu_2,$$

$$\frac{kq \cdot 2q}{L} + \frac{kq \cdot 2q}{2L} + \frac{kq \cdot 2q}{2L} + \frac{kq \cdot 2q}{3L} = \frac{2 \cdot mu_1^2}{2} + \frac{2 \cdot 2mu_2^2}{2},$$

где  $u_1$  – скорость правой пары,  $u_2$  – скорость левой пары. Из этой системы уравнений получаем

$$u_1 = \frac{2q}{3} \sqrt{\frac{7k}{Lm}} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{q}{3} \sqrt{\frac{7k}{Lm}}.$$

М.Иванов

**Ф2338.** На двух стенах тренажерного зала висят три одинаковых плоских зеркала. Какое максимальное количество своих изображений видит спортсмен, стоящий в центре зала? Какое максимальное количество изображений спортсмена одновременно может видеть сторонний наблюдатель? Изобразите план зала и выделите на нем области, из которых он может видеть изображение спортсмена. Для каждой области сделайте отдельный рисунок. На отдельном

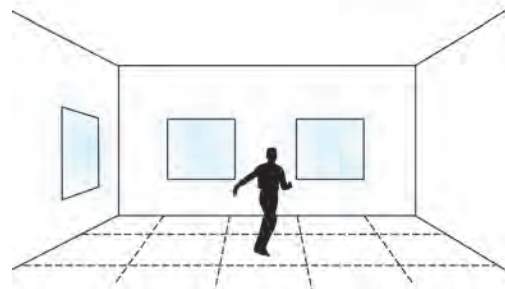
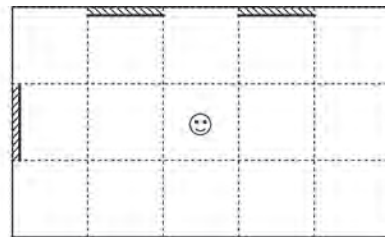


Рис. 1

рисунке изобразите область, из которой наблюдатель может видеть максимальное число изображений. План тренажерного зала с зеркалами (вид сверху) приведен на рисунке 1. Считайте спортсмена не слишком крупным (почти точечным).

Точечный предмет и его изображение в плоском зеркале равноудалены от плоскости зеркала. Оба они лежат на перпендикуляре, проведенном к плоскости этого зеркала. На рисунке 2 показана область A, из которой видно изображение  $S_1$  спортсмена S. На рисунке 3 показаны две области B, из которых видно изображение спортсмена  $S_2$ .

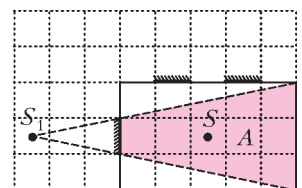


Рис. 2

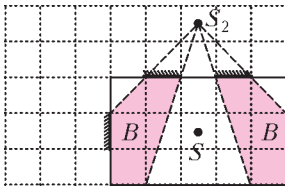


Рис. 3

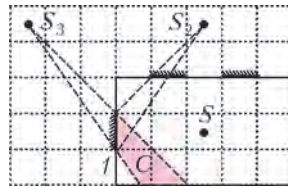


Рис. 4

На рисунке 4 показана область  $C$ , из которой в зеркале 1 видно изображение  $S_3$  «предмета»  $S_2$ . Все три изображения будут видны из той части комнаты – область  $D$  на рисунке 5, – в которой перекрываются области  $A, B, C$ .

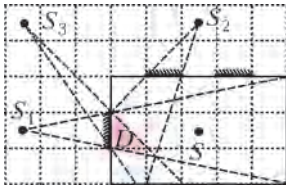


Рис. 5

Итак, из построений видно, что спортсмен может видеть только одно свое изображение  $S_1$  в зеркале 1. А сторонний наблюдатель может видеть 3 изображения из области  $D$ .

М.Замятнин

**Ф2339.** В вакуумированный сосуд емкостью  $V = 1,5$  л с жесткими и не проводящими тепло стенками впрыснули  $m = 1,1$  г жидкой тяжелой воды  $T_2O$  при температуре  $0^\circ C$  и герметизировали сосуд. Период полураспада ядер трития  $\tau = 12,33$  года. При распаде одного моля ядер трития выделяется  $E = 1,79$  ГДж энергии. Молярная теплоемкость тяжелой воды такая же, как и молярная теплоемкость обычной воды, т.е.  $75,6$  Дж/(моль·К). Теплота испарения тоже такая же, как и для обычной воды, т.е.  $L = 40$  кДж/моль. Какая температура и какое давление будут внутри сосуда через время  $t = 2$  ч после начала эксперимента?

При условии что ядра кислорода имеют атомную массу 16, молярная масса тяжелой воды  $T_2O$  равна  $M = 22$  г/моль. Следовательно, в сосуд впрыснули всего 0,05 моль воды. Количество ядер трития, в молях, в сосуде равно  $2(m/M) = 0,1$  моль.

Ядерные реакции распада ядер трития происходят с вероятностью, которая не зависит от того, в состав какого химического вещества входят атомы с такими ядрами. При каждом распаде одного ядра трития образуется одно ядро гелия-3, высвобождается один электрон и, кроме того, возникает и покидает сосуд антинейтрино:



Ядро гелия-3, возле которого до распада ядра трития и так находился один электрон, тут же присоединяет к себе из ближайшего окружения еще один электрон, и образуется атом гелия – химически инертного газа.

В соответствии с законом радиоактивного распада число радиоактивных ядер в сосуде будет меняться со временем так:

$$N = N_0 \cdot 2^{-t/\tau},$$

где  $N_0$  – исходное количество радиоактивных ядер. За время  $t = 2$  ч ( $t$  гораздо меньше времени полураспада

трития  $\tau$ ) распадутся

$$\Delta N = N_0 - N \approx N_0 \frac{t}{\tau} \ln 2$$

ядер трития. В нашем случае  $N_0 = 0,1$  моль, и  $\Delta N = 1,28 \cdot 10^{-6}$  моль. В результате распадов выделится тепловая энергия

$$U = E \Delta N = 2296 \text{ Дж}.$$

При этом за 2 часа в сосуде с тяжелой водой накопятся и продукты распада – атомы гелия-3 в количестве  $\Delta N = 1,28 \cdot 10^{-6}$  моль и некоторые другие вещества. Например, какое-то время живут по отдельности и образовавшиеся в результате распадов ядер электроны, которые могут присоединяться к окружающим молекулам воды, и химически активные радикалы ОТ. Могут образовываться (наверное, с небольшой вероятностью) молекулы кислорода  $O_2$ , а также молекулы тяжелого водорода  $T_2$  и молекулы перекиси тяжелой воды  $TO_2$ . Общее количество всех этих веществ значительно меньше исходного количества тяжелой воды (0,05 моль).

Понятно, что тяжелая вода (вместе с небольшим количеством других веществ) в теплоизолированном сосуде будет нагреваться, испаряться и частично или вся перейдет в пар. Оценим количество теплоты, которое необходимо для испарения всей имеющейся в сосуде жидкой воды. Предположим, что мы поместили в сосуд не имеющий теплоемкости поршень, который удерживает воду под давлением  $10^5$  Па. Тогда сначала вода подогреется до  $100^\circ C$ , и на это потребуется 378 Дж энергии. Затем вода перейдет в пар при температуре  $100^\circ C$ , на что потребуется 2000 Дж энергии. При этом объем под поршнем вырастет до величины  $22,4 \text{ л} \cdot 0,05 \cdot 373/273 = 1,53 \text{ л}$ . Вспомним, что по условию задачи объем сосуда равен 1,5 л – нам повезло! Итак, примерно через 2 часа вся вода в нашем «усовершенствованном» сосуде испарится, и к этому моменту в сосуде будет температура  $100^\circ C$  и давление  $10^5$  Па. «Вернем» теперь водяному пару энергию, которая пошла на то, чтобы он совершил работу по преодолению действия внешних сил, создававших то самое давление  $10^5$  Па со стороны поршня. Эта работа равна  $p \Delta V = 10^5 \text{ Па} \cdot ((1,53 - 0) \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) = 153 \text{ Дж}$ . Получается, что для испарения воды в сосуде без поршня потребуется  $378 \text{ Дж} + 2000 \text{ Дж} - 153 \text{ Дж} = 2225 \text{ Дж}$  энергии. Эта величина меньше того количества теплоты, что выделилось в сосуде за два часа. Оставшаяся энергия  $(2296 - 2225) \text{ Дж} = 71 \text{ Дж}$  пойдет на изохорный нагрев водяного пара. Молярная теплоемкость водяного пара равна  $3R \approx 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ , поэтому пар нагреется до температуры

$$T = 373 \text{ К} + \frac{71 \text{ Дж}}{25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 0,05 \text{ моль}} \approx 430 \text{ К}.$$

Давление при этом достигнет величины

$$p = 10^5 \text{ Па} \cdot \frac{430 \text{ К}}{373 \text{ К}} \approx 1,15 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Н.Уклонов

# Задачи

1. Маша хотела купить булочку ценой в целое число рублей. Ровно она заплатить не смогла и приготовила как можно меньшую сумму, но чтобы на булочку хватило. В итоге она дала продавщице 9 рублей и получила сдачу. Сколько стоила булочка?

*С.Иванов, Б.Дружинин*



2. Велосипедисты Алеша, Боря и Вася одновременно стартуют из одной и той же точки кольцевого трека (скорость каждого постоянна). Первыми после старта проехали друг мимо друга Алеша и Боря (в одну сторону или в разные — неизвестно). Известно, что



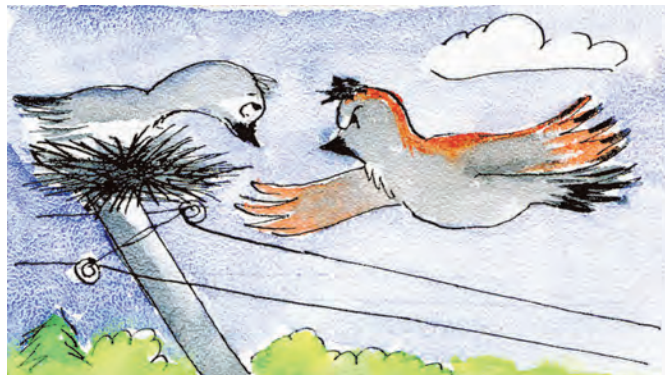
Алеша едет по часовой стрелке, а Вася — против часовой стрелки. В каком направлении едет Боря?

*Б.Френкин*

3. В ряд слева направо стояли несколько столбов, между каждыми двумя соседними был натянут провод. Подул ветер, все столбы упали влево, но провода при этом не порвались и снова оказались натянутыми. Докажите, что изначально все провода были параллельны земле.

*С.Дориченко*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.



4. Петя хочет придумать аналог игры «камень — ножницы — бумага» для 10 предметов. В ней должны выполняться два условия: про любые два предмета можно сказать, какой из них кого бьет; любые два предмета равноправны (т.е. каждый предмет бьет одно и то же число предметов). Сможет ли Петя придумать такую игру?

*Г.Жуков*



5. На старой печатной машинке Незнайки на печать каждой конкретной цифры всегда расходуется одно и то же количество чернил. Незнайка говорит, что на этой машинке нельзя напечатать два натуральных числа, одно в 9 раз большее другого, истратив на каждое число одно и то же количество чернил. Можно ли утверждать, что он наверняка ошибается?

*Е.Бакаев*



# Электромагнитное излучение на пальцах

(Урок физики в Колледже Эйнштейна<sup>1</sup>)

**В. СЫЩЕНКО**

**О**БЪЯВЛЕНИЕ НА КЛАСНОЙ ДОСКЕ ВОЗВЕЩАЛО: «СЕ-годняшнее занятие проводит профессор Ван-Теллер». Прозвенел звонок, надпись полыхнула синим пламенем и исчезла, оставив доску безупречно чистой. В тот же момент дверь открылась, и в аудиторию вошел высокий человек с кустистыми бровями. Никки не сразу узнала старого профессора, прошедшего курс омоложения.

— Здравствуйте! Коллега Дермюррей уехал на конференцию, и сегодняшний урок проведу я. Судя по программе, вы уже освоили изрядный кусок электродинамики. — Профессор обвел взглядом класс. — Сейчас посмотрим, как вы ее поняли.

— Профессор, сколько можно обсуждать результаты позапрошлого века? — с претензией в голосе произнес принц Дитбит. — Первая контрольная, вторая контрольная, коллоквиум...

— Да-да, в мое время после трех двоек подряд студент вылетал из колледжа... — по лицу профессора разлилась блаженная улыбка, резко контрастировавшая с недовольной физиономией принца. — Итак, кто из вас скажет, как породить электромагнитную волну?

В ответ раздался хор голосов:

— Подвигать электрон с ускорением! Покачать туда-сюда!

— А кто возьмется объяснить, почему ускоренно движущийся заряд излучает?

— ... уравнения Максвелла ... запаздывающие потенциалы ... — слышалось с разных сторон, кто-то даже начал перебрасывать через школьный компьютер формулы на доску и стены.

— Достаточно, достаточно! — Профессор поднял ладони перед собой. — Я верю, что вы знаете, как все это выводится, иначе бы вы здесь не сидели, — и профессор опять плотно улыбнулся. — Но самые внимательные из вас могли заметить, что я задал несколько иной вопрос: кто может ОБЪЯСНИТЬ, почему ускоренно движущийся заряд излучает? Доступно, по рабоче-крестьянски?

— По рабоче-как?.. — скривил губы не поверивший своим ушам принц Дитбит.

Улыбка сползла с лица профессора. Оказывается, он и без деревянной клюки мог выглядеть весьма грозно. — Крестьянски! — с нажимом повторил Ван-Теллер, впери в принца такой тяжелый взгляд, что с того

мигом слетело процентов тридцать обычной наглости. Сквозь истончившуюся оболочку наследный отпрыск династии Дитбитов почувствовал буравящие взгляды своих подпевал, яснее всяких слов говорившие: «Уступишь — значит слабак!»

Неизвестно, чем бы все это кончилось, если бы в тот же момент весь остальной класс не повернулся, будто по команде, указывая на девочку с хрустальными волосами:

— Никки! Она знает! Она на своем астероиде картошку выращивала!

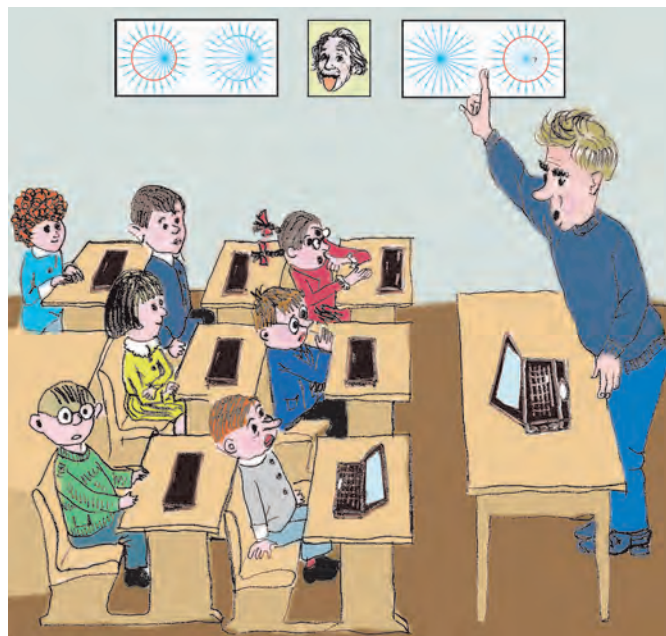
«И баобабы выпалывала!» — проворчала про себя Никки, а вслух произнесла:

— Вообще-то помидоры, профессор...

— Помидоры тоже пасленовые, тоже неплохо... Итак, мисс Гринвич?

— Если электрон движется прямолинейно и равномерно, то всегда можно найти инерциальную систему отсчета, в которой он покоится. А у покоящегося электрона энергия минимальна, ему просто нечего излучать. А так как физика явления не меняется при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, то и равномерно движущийся электрон излучать не будет. Значит, для возможности излучать остается только ускоренное движение.

— Ну что ж, мисс Никки. Все правильно, привлечение



<sup>1</sup> Об этом удивительном колледже можно узнать из книги Н. Горькавого «Астровитянка» (М.: АСТ, 2011). (Прим. ред.)

принципа относительности вполне достойно ученицы школы Эйнштейна. Только вот последняя фраза мне не очень нравится, она не отвечает на поставленный вопрос. Тот факт, что равномерно движущийся заряд излучать не может, сам по себе еще не означает, что его ускоренно движущийся собрат излучать БУДЕТ. Попробуйте еще раз. Почему же ускоренно движущийся заряд излучает?

«Да, вездливости у профессора не убавилось!» — подумала Никки, а вслух обратилась к школьному компьютеру: — Вибратор Герца, пожалуйста!

На большом экране появилась классическая картинка (рис.1).

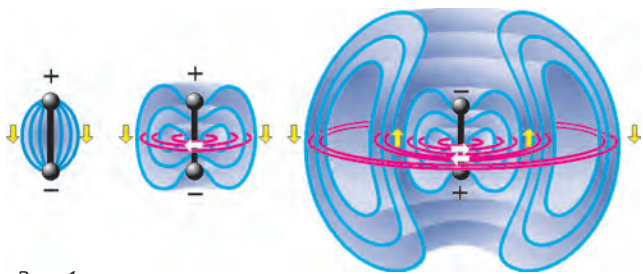


Рис. 1

— Возьмем два металлических шара, соединенных проводящим стержнем. Пусть под действием генератора (на рисунке не показан) некоторая часть электронов сконцентрируется в нижнем шаре. Тогда между шарами возникнет электрическое поле. Если теперь позволить электронам перетекать из нижнего шара в верхний, то в стержне возникнет электрический ток, создающий магнитное поле. Затем ситуация повторится с изменением полярности. Генератор будет поддерживать незатухающие колебания электронов.

— Хорошо, а теперь каверзный вопрос. — Профессор снова улыбнулся. — Вблизи вашего диполя магнитное поле достигает максимума, когда максимума достигает ток в соединяющем шары стержне, т.е. когда заряды в обоих шарах обращаются в ноль, а с ними — и электрическое поле в прилегающей области пространства. Иными словами, электрическое и магнитное поля

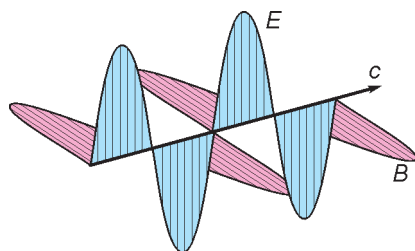


Рис. 2

вблизи диполя сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  друг относительно друга. Но ведь в электромагнитной волне, уносящейся прочь от диполя, эти поля колеблются синфазно (рис.2), од-

новременно достигая максимума в выбранной точке пространства и одновременно же обращаясь в ноль!

— Но ведь это не вопрос, а утверждение, профессор! — верный рыцарь Джерри, сидевший с Никки за одной партой, мужественно принял огонь на себя.

— Верно, юноша! Вопрос мог бы быть таким: «Как же так получается?», но я не стал его формулировать по той простой причине, что на него невозможно ответить без анализа уравнений Максвелла. И вообще, просле-

дить перестройку поля вблизи антенны в поле излучения — не такая простая задача. А мы ведь сегодня договорились обходиться без сложной математики, не так ли?

— И все-таки, — профессор снова обратился к Никки, — в вашем рассуждении опять есть привлекательный для наших сегодняшних целей элемент. Вы попытались изобразить поле излучения силовыми линиями. После Герца это делали редко, хотя ничего более наглядного в области электродинамики не придумано. И поэтому сейчас я вам кое-что покажу. Ловкость рук и никакого мошенничества! — Профессор вскинул руки и продемонстрировал аудитории пустые ладони. — Внимание на доску! — И профессор прыжком вскочил на эстраду.

Энтузиазм профессора мало-помалу передавался ученикам. Что такого удивительного он сможет им показать после проекций многомерных поверхностей, фотографий далеких галактик и упакованных в умопомрачительные структуры белковых молекул?

— Итак, пусть сначала наш заряд покоится. Рисуем расходящиеся от него силовые линии. — Профессор провел раз двадцать стилосом по доске, оставляя слегка корявые линии. Школьный компьютер тут же подправил их и снабдил стрелочками (рис.3).

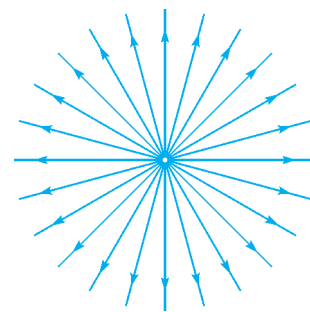


Рис. 3

— А теперь представим себе, что скорость заряда мгновенно, скачком изменилась от нуля до некоторого конечного значения  $v$ ...

— Профессор, а разве так бывает? — спросил мальчик в очках с первой парты.

— Ну, конечно же, нет. Это некое приближение, идеализация. Если у нас останется время, мы обсудим пределы его применимости. Так вот, попробуем понять, как будет выглядеть наша картинка спустя время  $t$  после старта. Сигнал о том, что заряд пришел в движение, распространяется со скоростью света  $c$ .

Нарисуем сферу радиусом  $ct$  с центром в точке, откуда стартовал заряд (рис.4). Поле снаружи этой сферы еще не «знает» о том, что произошло, и остается таким же, каким оно было до начала движения заряда. — И профессор сделал неожиданный выпад в сторону Никки: — А что будет внутри сферы?

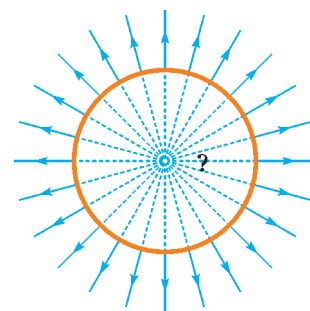


Рис. 4

— И профессор сделал неожиданный выпад в сторону Никки: — А что будет внутри сферы?

— Поле равномерно движущегося заряда! — не дала заставить себя врасплох Никки.

— Верно! Пусть для простоты движение его медленное, т.е.  $v \ll c$ . Тогда силовые линии будут выглядеть точно так же, как и у неподвижного заряда. Только исходить они будут из того места, куда за время  $t$

переместился заряд. — Профессор провел ладонью внутри окружности, и компьютер стер прежние линии (рис.5), тактично подождал, пока профессор нарисует новые, после чего подправил их (рис.б).

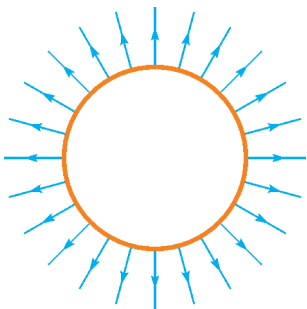


Рис. 5

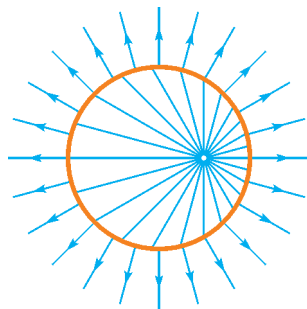


Рис. 6

— А теперь вспомним, что силовые линии электрического поля непрерывны, начинаться и заканчиваться они могут только на зарядах, а на нашей сфере никаких зарядов нет.

«Ну да, теорема Гаусса, четвертое уравнение Максвелла», — подумала Никки. — «Все-таки совсем без уравнений он не обошелся».

— А раз так, — продолжал профессор, по голосу которого можно было предположить, что рассказ достиг кульминации, — то каждая из наших силовых линий внутри сферы соединится вот таким кусочком (целиком лежащим на сфере) с соответствующей

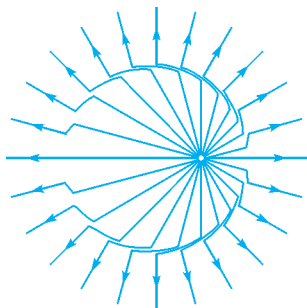


Рис. 7

линией снаружи (рис.7). Так что на сфере мы получаем бесконечную густоту силовых линий, а значит, бесконечную напряженность поля. Но не стоит беспокоиться, это просто следствие нашей идеализации с мгновенным ускорением.

— А теперь самое главное. Эта сфера с лежащими на ней силовыми линиями электрического поля «рас-

пухает» со скоростью света. Скажите мне, что это за поле такое, которое распространяется со скоростью света и напряженность которого перпендикулярна направлению распространения?

В ответ раздался дружный хор голосов:

— Это электромагнитная волна! — И даже высокомерные аристократы ощутили в этот миг радость маленького открытия.

Профессор сиял, довольный произведенным впечатлением.

— Вот так ускорение заряда и порождает излучение! Знак ускорения не важен, подобную картинку можно нарисовать и для мгновенного торможения заряда. С помощью этого рисунка можно даже делать кое-какие количественные предсказания. Например, я могу с уверенностью утверждать, что в направлении ускорения интенсивность излучения будет нулевой. Смотрите, соответствующая силовая линия не претерпевает

излома, и густота линий на сфере, соответствующих полю излучения, будет в этом месте нулевой.

— А теперь обратите внимание вот на что. Излучение электромагнитных волн — это прямое следствие теории относительности, которая гласит, что всякое взаимодействие (в нашем случае это сигнал об изменении скорости частицы) распространяется НЕ мгновенно. Если бы изменение поля вслед за изменением положения заряда происходило бы мгновенно во всем пространстве, как считали во времена Ньютона, наша картинка была бы неправильной. Не было бы никакой сферы, на которой формируется поперечное поле излучения, и никакого излучения вообще не было бы.

— Но тогда связь была бы мгновенной: подвигал заряд здесь, и все об этом сразу знают, — слышалась реплика из глубины аудитории. — А то с Марсом по телефону говорить — одно мучение!

— А вот и нет! — возразил профессор. — Только поле излучения убывает с расстоянием как  $1/r$ . Статические поля (которые только бы и остались в вашем воображаемом мире) убывают не медленнее чем по закону обратных квадратов, так что никакой дальней связи не получится.

— Совсем как любовь, — вставила принцесса Дзинтара, — когда предмет любви находится вдали от тебя два дня, любовь ослабевает в четыре раза, а когда целых три дня — уже в девять раз! — После того как класс отсмеялся, девочка, довольная произведенным эффектом, добавила: — Так писали в научно-популярных книгах восемнадцатого века!

Мальчик в очках с первой парты не дал дискуссии уйти в сторону:

— Так что же с применимостью теории, профессор?

— «Мгновенность» изменения скорости означает, что промежуток времени, в течение которого заряд двигался ускоренно, намного короче других характерных времен данной задачи. А какое время является характерным в задаче об излучении электромагнитной волны?

— Период волны? — предположила Никки.

— Верно! Так что наша идеализация с мгновенным ускорением заряда вполне законна, если мы интересуемся излучением достаточно низких частот.

— А намного короче — это сколько?

— В хорошей теории — в десять раз меньше, а в плохой — в два.

Класс отреагировал ожидаемым смехом.

— Но зачем нужны плохие теории? — Никки была слегка разочарована.

— А если других нет? Создайте лучшую — все в ваших руках!

Прозвенел звонок. Профессор озарил класс заключительной улыбкой.

— До свидания! — и, обернувшись от самой двери, добавил: — А сажать картошку сейчас самое время! Я договарюсь, чтобы вам выделили участок. После таких упражнений умственная работа доставляет еще большее наслаждение!



# Сверхзвуковые автобусы, лодки и... деревья

Е. СОКОЛОВ

В СТАТЬЕ «СВЕРХЗВУКОВЫЕ САМОЛЕТЫ И КОНУС МАХА» («Квант» №3 за 2010 г.) было показано, насколько полезно использовать понятие конуса Маха при исследовании кинематики сверхзвуковых самолетов. Напомним, что это такой конус, у которого угол  $\alpha$  при вершине определяется соотношением  $\sin \alpha = c/v$ , где в числителе и в знаменателе стоят скорости звука и самолета соответственно.

Конусы Маха – вполне реальные образования, сопровождающие быстро движущиеся предметы: реактивные самолеты, пули и снаряды, метеориты. Они проявляются как уплотнения воздуха, которые можно видеть на фотографиях. Первую такую фотографию получил сам Эрнст Мах (интересно, что для этого ему пришлось сконструировать особый фотоаппарат).

Конусы Маха можно увидеть и в обычной жизни (рис.1), надо только внимательно смотреть. Особенно хорошо они видны на мелкой воде. Например – после дождя по улицам бегут широкие, но мелкие потоки воды. Если на их пути попадает камень, то обтекающая его вода образует на поверхности потока две линии возвышения – конус Маха. А бывает, волна набежит на песчаный берег и при ее отступлении за каждой ракушкой образуется свой личный маленький конус Маха.

– А я видел, как ворона шла по мелкой луже, ища место, где попить, и волны от ее лап сложились в конус Маха.

– А я видела, как капли воды, падающие с весла, образовывали на поверхности воды конусы Маха.

– Это очень хорошие примеры. Добавлю, что еще можно просто провести по поверхности лужи прутиком, и при этом тоже образуется конус Маха.

– А то что вершины деревьев имеют коническую форму, это тоже конусы Маха?

– Если ботаники подтвердят, что побеги растут с постоянной скоростью, то да.

А вот в задачах конусы Маха встречаются не только при движении сверхзвуковых самолетов, метеоритов и пуль, но и при движении обычных автобусов или лодок.



Рис. 1

## Грибники и автобус

Хотя грибники и утверждают, что грибы начинают попадаться как раз тогда, когда опаздываешь на автобус, все-таки лучше не доводить дело до критической отметки. Следует четко следить за временем и рассчитывать свой график движения.

Вот классическая задача на такой расчет.

**Задача 1.** По прямому шоссе движется с постоянной скоростью автобус (рис.2). Нарисуйте так называемую

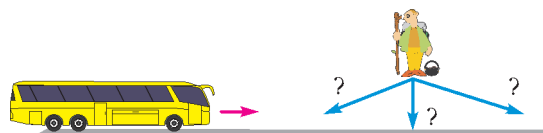


Рис. 2

область достижимости автобуса, т.е. область, из которой грибник еще может успеть на него. Примите, что скорость грибника в пять раз меньше скорости автобуса.

**Обсуждение.** Прикинем, что нам надо сделать для того, чтобы получить ответ. Во-первых, в каждую точку плоскости (а их бесконечно много) нам надо поместить по грибнику. Во-вторых, нам надо разрешить каждому грибнику двигаться во всех возможных направлениях (а их тоже бесконечно много), чтобы выяснить, сможет ли он хоть при каком-нибудь направлении движения успеть на автобус.

– Мне лично кажется, что грибнику надо всегда идти по перпендикуляру  $OA$  к дороге (рис.3). Это самый короткий путь, и он займет меньше всего времени.

– Да, путь  $OA$  самый короткий, но для грибника он не лучший – ведь у грибника нет цели выйти на дорогу как можно быстрее, а есть цель выйти на дорогу раньше автобуса. При таком условии путь  $OA_1$ , который идет чуть правее, будет для грибника явно предпочтительнее.

– А мне не очень понятно, почему более длинный путь  $OA_1$  предпочтительнее для грибника. И совсем не понятно, почему это явно видно!

– Ну что же, давайте наберемся терпения и послушаем объяснения.

В некоторых случаях, когда грибник оказывается совсем рядом с дорогой, ему практически все равно куда идти, лишь бы не в сторону от дороги. Но вот когда он находится далеко от дороги, может случиться так, что, идя по перпендикуляру  $OA$ , он опоздает на автобус, а идя по тропе  $OA_1$ , успеет, хотя и будет идти дольше. Возьмем конкретный пример. Пусть отрезок  $OA$  имеет длину 10 км, а точка  $A_1$  лежит на 100 м правее точки  $A$ , и пусть грибник, идущий по тропе  $OA$ , чуть-чуть опоздал на автобус. А вот у грибника, идущего к точке  $A_1$ , еще есть время – ведь автобусу надо еще проехать до этой точки целых 100 м.

– Ну так и грибнику надо больше пройти!

– Конечно, но на сколько боль-

(Продолжение см. на с. 34)

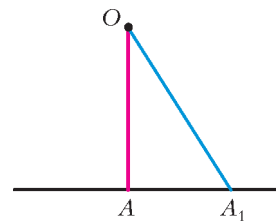


Рис. 3

...движения друг по отношению к другу тел, заключенных в каком-либо пространстве, одинаковы, покоится ли это пространство или движется равномерно и прямолинейно без вращения.

Исаак Ньютон

...центробежные силы неодинаковых тел, движущихся с одинаковой скоростью по равным окружностям, относятся между собой как веса этих тел, т.е. как количества вещества в них...

Христиан Гюйгенс

Если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на нее внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равно-

весии и к ней можно будет применять все уравнения статики.

Жан Лерон Д'Аламбер

Вряд ли можно назвать другую теорему механики, которая вызывала бы столько разного рода недоразумений, как начало Д'Аламбера. Реальны или фиктивны те силы инерции, о которых говорится в этом начале?

Евгений Николаи

Чтобы работать с законами Ньютона, [надо] подправить силы, ввести в них добавочный член. Другими словами, появляется кажущаяся, мистическая, новая сила неведомого происхождения...

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакомы вам силы инерции?

Опять инерция? Ведь совсем недавно — в прошлом выпуске «Калейдоскопа» — о ней уже шла речь. Верно, тематически эти выпуски связаны. Можно сказать, один продолжает другой, но не заменяет его и не повторяет. Обратите внимание на добавление в заголовок лишь одного слова — «силы». Обсудить, как эта добавка расширяет разговор об инерции и выводит его за рамки сформулированного в прошлый раз понятия, и призваны сегодняшние сюжеты.

Что же это за таинственные силы, не дающие покоя и теоретикам, и практикам? Можно ли ими управлять, поставить нам на службу, если десятилетиями не удавалось прийти к общему понятийному знаменателю? Не беспокойтесь: и обуздать силы инерции, и научиться обезопасить машины и механизмы, где они могли бы проявить свой «буйный нрав», человек наловчился. И найти им применение в самых современных устройствах микромеханики — от робототехники до систем виртуальной реальности — смог. И объяснить с их помощью многие природные явления — сумел. Более того, дотошный разбор по косточкам казавшихся кому-то ясными, а кому-то загадочными вопросов привел к осмыслению самых основ устройства мира и к появлению новых описывающих этот мир фундаментальных теорий.

Вот как нас — «по инерции» — далеко занесло! Отдадим же должное этому каверзному, но замечательному понятию, а также и великому ученому, давным-давно затеявшему связанную с этим понятием историю, — Галилео Галилею. Тем более в год его 450-летнего юбилея.

### Вопросы и задачи

**1.** В автомобиле, движущемся с постоянной скоростью, роняют камень. Наблюдатели в автомобиле и на дороге видят, что его движение происходит по разным траекториям. Какая из них является истинной?

**2.** Человек движется относительно платформы прямолинейно, но неравномерно, а платформа движется относительно земли прямолинейно и равномерно. Какой может быть траектория движения человека относительно земного наблюдателя?

**3.** На лишенном трения полу движущегося трамвая неподвижно лежит бильярдный шар. Время от времени шар начинает неравномерно кататься по полу. Когда это происходит?

**4.** Какая сила  $\vec{F}$  должна действовать на тело массой  $m$ , чтобы оно двигалось равномерно и прямолинейно относительно вагона, движущегося поступательно с ускорением  $\vec{a}$ ?

**5.** Чему равен угол  $\alpha$  отклонения от вертикали нити с подвешенным на ней тяжелым грузиком массой  $m$  в вагоне, движущемся по горизонтальному пути с ускорением  $a$ ? Зависит ли этот угол от массы грузика?

**6.** Сосуд, частично заполненный ртутью, движется с горизонтальным ускорением, из-за чего поверхность ртути наклонена к горизонту под некоторым углом  $\alpha$ . Изменится ли этот угол, если поверх ртути налить воду?


**7.** Как будет вести себя воздушный шарик, заполненный гелием, в закрытом автомобиле, ускоряющемся вперед?

**8.** Сосуд с водой скользит вниз по гладкой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Какой угол с горизонтом образует поверхность воды? Изменится ли ответ, если скольжение будет происходить с трением?

**9.** С некоторой высоты начинает падать сосуд с водой, в котором в начальный момент на некоторой глубине находится кусочек пробки. Как будет двигаться пробка относительно стенок сосуда, если пренебречь сопротивлением воздуха?

**10.** Опрокинутая пробирка укреплена неподвижно над сосудом с водой, как показано на рисунке. Как изменится





уровень воды в ней, если вся система начнет свободно падать?

**11.** Период колебаний математического маятника, находящегося в неподвижной ракете, равен  $T$ . Каким станет этот период при вертикальном спуске ракеты с ускорением  $2g$ ?

**12.** Самолет летит с постоянной скоростью, описывая окружность на постоянной высоте. Какое направление будет указывать нить отвеса, подвешенного в салоне самолета?

**13.** Велосипедист движется по горизонтальной, вращающейся вокруг вертикальной оси плоскости в таком направлении и с такой скоростью, что относительно земли он остается неподвижным. Должен ли он наклоняться по направлению к оси вращения плоскости?

**14.** С помощью рычажных весов взвесили 10 килограммов апельсинов на экваторе. Изменится ли результат взвешивания на полюсе?

**15.** В цилиндре, наполненном водой и закрытом со всех сторон, находятся пробка, кусочек свинца и некоторое тело  $A$ , плотность которого равна плотности воды. Цилиндр приводят в быстрое вращение вокруг его оси. Как будут расположены тела в цилиндре, если ось вращения вертикальна?

**16.** Воздух из субтропического пояса повышенного давления переходит в экваториальный пояс пониженного давления. В какую сторону — на запад или на восток — он будет отклоняться при своем движении?

### Микроопыт

Попробуйте раскрутить небольшое ведро с водой в вертикальной плоскости с такой скоростью, чтобы вода не выливалась. Получилось? Тогда объясните явление.

### Любопытно, что...

...о существовании центробежной силы инерции догадывался еще Аристотель, а Птолемей считал, что если бы Земля вращалась вокруг своей оси, то из-за центробежной силы мы не смогли бы удерживаться на ее поверхности. Кеплер и Галилей опровергли эту точку зрения, однако полагали, что при удалении от центра вращения центробежная сила должна уменьшаться.

...изучая движение маятника, Гюйгенс установил, что если массивное тело, подвешенное на нити, движется по окружности, то нить начинает растягиваться как бы еще одной силой, дополнительной к силе тяжести. Он назвал ее центробежным стремлением и привел определяющие ее закономерности, сохранившие свое значение до сих пор. Причем для Гюйгенса это была отнюдь не фиктивная, а вполне реальная сила той же природы, что и сила тяжести.

...на то, что в процессе падения на вращающуюся Землю тело должно смещаться на восток, указал еще в 1679 году Ньютон на заседании Лондонского Королевского общества. В обсуждении выступил первый Королевский астроном Джон Флемстид, утверждавший, что этот эффект давно известен в артиллерии. Так, при угле возвышения орудия в  $87^\circ$  выпущенное ядро падает обратно в жерло, на покоящейся же Земле этот угол должен был бы равняться  $90^\circ$ .

...идеально точные, ритмично идущие часы называют инерциальными. Ход всех подобных часов во всех инерциальных системах отсчета одинаков — в мире

существует единое, всеобщее и универсальное время, именуемое абсолютным. Это положение — важнейший результат классической механики Галилея—Ньютона, принимаемый в ней в качестве аксиомы.

...великий французский ученый Д'Аламбер был широко образованным человеком — математиком, механиком и философом-просветителем. Его избрали во все существующие в то время Академии наук, в том числе и в Петербургскую. Приведенный в эпитафии знаменитый принцип, позволявший сводить динамические задачи к статическим, Д'Аламбер сформулировал в 1743 году в «Трактате о динамике», когда ему было всего 26 лет.

...в неинерциальных системах отсчета при учете сил инерции к ним нельзя применять третий закон Ньютона, так как нет никаких сил противодействия, приложенных к другому телу со стороны данного, да нет и самого «другого» тела. Также в этих системах несправедливы и следствия из третьего закона, в том числе закон сохранения импульса.

...споры об истинности или фиктивности сил инерции продолжались более двухсот лет. Действительно, при переходе к инерциальной системе отсчета от них можно просто избавиться. С другой стороны, они вызывают вполне реальные события — разрыв маховиков, сход с рельсов и крушения поездов и так далее.

...австрийский физик и философ Эрнст Мах считал источником происхождения сил инерции вращающуюся вокруг наблюдателя Вселенную. При таком подходе инертная масса любого тела была обусловлена влиянием всех тел окружающего мира. Эту точку зрения, названную принципом Маха, первоначально разделял и Эйнштейн, но впоследствии от нее отказался.

...в природе действие сил инерции особенно ярко проявляется при движении огромных масс воды и воздуха в океане и в атмосфере. Так, течение Гольфстрим, двигаясь на север в северном полушарии, под действием кориолисовой силы инерции отклоняется вправо, обедняя теплом Канаду и обогревая Европу. Этой же силе обязаны своим появлением гигантские циклонические вихри, закручивающиеся в северном полушарии против часовой стрелки и по часовой — в южном.

...без инерциальной навигации немыслимы сегодня как полеты космических кораблей и авиалайнеров, так и плавание судов надводного и особенно подводного флота. Одним из применяемых в инерциальной навигации приборов является чувствительнейший акселерометр, позволяющий измерять ускорения подвижных объектов с точностью до  $10^{-7} g$ .

### Что читать в «Кванте» о силах инерции

(публикации последних лет)

1. «Принцип Торричелли и центробежная сила инерции» — 2005, №3, с.35;
2. «Подводные камни» силы Архимеда» — 2009, №2, с.46;
3. «Задачи механики в неинерциальных системах отсчета» — 2010, №2, с.51;
4. «Физический калейдоскоп. Выпуск 3» — 2012, Приложение №3, с.16, 126;
5. «Калейдоскоп «Кванта» — 2014, №1, с.32.

Материал подготовил А.Леонович



(Начало см. на с. 31)

ше? На сколько тропа  $OA_1$  длиннее перпендикуляра: на 100, на 50, на 20 м? Оказывается, всего на 50 см! (Убедитесь в этом, например, с помощью калькулятора.) Поэтому второй грибник выйдет на дорогу в точке  $A_1$ , может, на полсекунды позже первого. А вот автобусу еще ехать и ехать!

А то что путь  $OA_1$  более выигрышный, для опытного человека сразу очевидно по следующей причине. Перпендикуляр  $OA$  – самый короткий из всех отрезков, ведущих к дороге, и все близкие к нему отрезки лишь чуть-чуть длиннее его. Поэтому, смещая конечную точку тропы перпендикулярно отрезку  $OA$  вправо, мы лишь немного увеличиваем путь грибника, но существенно увеличиваем путь автобуса.

Итак, мы показали, что движение перпендикулярно дороге не самый лучший выбор для грибника. А какой же путь лучший? Увы, мы этого пока не знаем, и поэтому стандартный подход остается для нас по-прежнему неприступным. Надо искать что-то нестандартное. Подсказка у нас уже есть – где-то здесь должен появиться конус Маха.

**Решение.** Поступим наоборот – посадим в автобус много грибов и повезем их из города в лес. И при этом договоримся, что в каждой точке шоссе много-много грибников (но не все) будут выходить из автобуса и расходиться во все стороны. Таким образом, автобус едет по дороге со

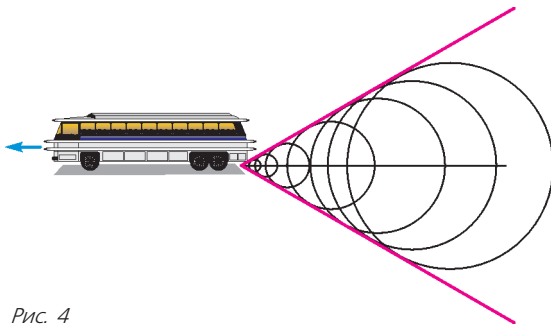


Рис. 4

скоростью  $v$ , а от него во все стороны, как звук от самолета, расходятся со скоростью  $c$  грибники. И у нас образуется... конус Маха (рис.4) с углом раствора  $\alpha = \arcsin(c/v)$ , где  $c$  – скорость грибника, а  $v$  – скорость автобуса. В каждой точке внутри конуса окажется по два грибника, на самом краю – один, а за краем – никого. Конус Маха и будет той областью, из которой путник может успеть на автобус. Доказать? Пожалуйста.

Любой путник, находящийся внутри или на краю конуса Маха, может успеть на автобус. Для этого ему достаточно просто пойти в направлении, противоположном тому, по которому в данную точку пришел один из грибников. Причем путник выйдет на дорогу как раз к подходу автобуса. Точно так же нетрудно доказать, что ни один путник, стоящий вне построенного нами конуса Маха, ни за что не успеет на автобус (проведите это доказательство самостоятельно).

Итак, ответ к нашей задаче таков: область достижимости автобуса – это конус Маха с вершиной в автобусе и углом при вершине  $2\alpha = 2\arcsin(c/v)$ . Каждый путник, находящийся внутри этого конуса, имеет выбор – у него есть два пути, по которым он может выйти на дорогу точно к подходу автобуса, а также он может выбрать любой путь, лежащий между ними. Правда, в этом случае ему придется некоторое время подождать автобус. Для путника же, стоящего на образующей конуса, есть только один вариант возвращения – ему надо идти перпендикулярно этой образующей.

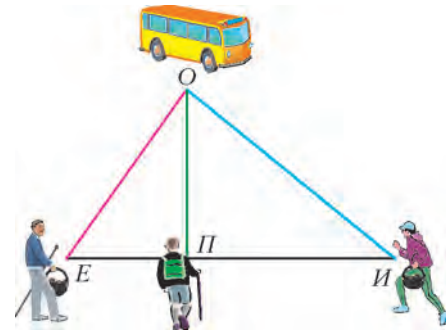


Рис. 5

А теперь – задачи для самостоятельного решения.

**Задача 2.** Грибники Егор, Петр и Иван возвращались из леса. Егор пошел по левой тропинке (рис.5). Он шел до дороги 30 мин и успел точно к автобусу. Иван пошел правой тропинкой. Шел он 40 мин и тоже успел прямо к автобусу. А Петр пошел по самой короткой тропинке и дошел до дороги за 24 мин. Сколько времени Петр ждал автобуса? Скорости всех грибников одинаковы.

**Задача 3.** А еще был с грибниками Сидор, который рассудил так: «Зачем ходить не оптимальными путями? Я пойду оптимальным путем, а время, которое у меня сейчас есть в запасе, потрачу лучше на сбор грибов. Не зря говорят опытные грибники – чем меньше времени до автобуса, тем больше грибов в лесу!» Скажите: сколько времени есть у Сидора в запасе, если он действительно знает оптимальный путь?

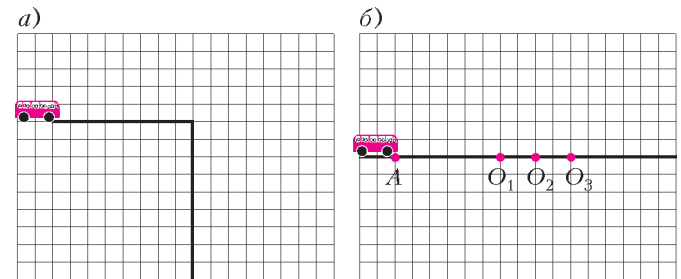


Рис. 6

**Задача 4.** Постройте область достижимости автобуса, для случаев: а) дорога делает поворот на  $90^\circ$  (рис.6,а); б) водитель берет пассажиров строго на остановках  $O_1, O_2, O_3$  (рис.6,б). Число Маха для автобуса и путника считайте равным двум.

### Переправа через реку

Представим, что мы стоим на берегу быстрой широкой реки (рис.7). Примем, что ширина реки  $L = 120$  м, скорость ее течения  $v = 4$  м/с, а в нашем распоряжении есть весельная лодка, на которой мы можем плыть со скоростью  $c = 3$  м/с. Итак, с этого момента величины  $L, v$  и  $c$  фиксированы. Мы свободны лишь в одном – в выборе курса лодки, т.е. в выборе направления, в котором мы будем грести.

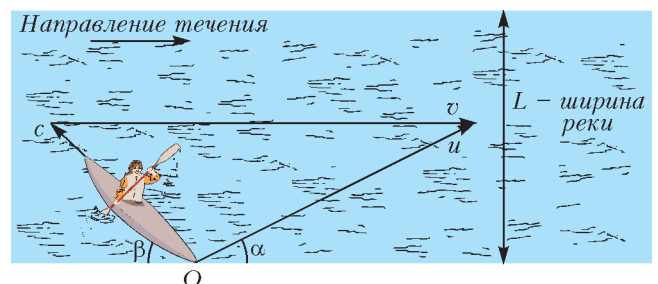


Рис. 7

Хотим сразу же предупредить читателя вот о чем. В спокойной воде (на озере) куда мы направляем лодку (гребем), туда же она и движется. А вот на реке это уже разные направления. На рисунке 7 показано, что происходит на реке с лодкой за одну секунду. Мы гребем (направляем лодку) под углом  $\beta$  к берегу и перемещаемся относительно воды на расстояние  $c$ . Но кроме этого есть течение, и оно сносит нас за секунду на расстояние  $v$ . В результате мы движемся относительно берега под совсем другим углом  $\alpha$  и совсем с другой скоростью  $u$ .

Вот несколько задач, связанных с переправой через реку.

**Задача 5.** *За какое минимальное время наша лодка (см. рис. 7) может переправиться через реку? Какой курс (угол  $\beta$ ) следует при этом выбирать гребцу? На какое расстояние  $d$  ее снесет вдоль берега? Каков путь  $s$  лодки относительно берега?*

**Обсуждение.** Мы думаем, что у излишне самоуверенных ребят есть личный опыт относительно этой ситуации, и они сразу же догадаются, как следует вести лодку, чтобы время переправы было минимальным. «Излишне самоуверенными» мы называем тех ребят, которые, едва научившись плавать в пруду или бассейне, начинают покорять настоящие реки с быстрым течением. Хорошо, если речка маленькая и сил хватает. А если дело принимает нешуточный оборот: силы на исходе, а противоположный берег еще далеко?

Вот здесь мы и попадаем в ситуацию, когда нам надо как можно быстрее оказаться на другом берегу. Как же надо себя вести? Конечно, плыть перпендикулярно течению, т.е. держать курс  $\beta = 90^\circ$ . И ничего, что течение сносит вниз, главное, чтобы каждый гребок приближал нас к желанному берегу.

Итак, мы вместе с вами ответили на самый главный вопрос задачи. Остальные ответы предлагаем вам получить самостоятельно.

А теперь – задача посложнее.

**Задача 6.** *Лодочнику надо переправиться через реку так, чтобы снос лодки был минимальным. Какой курс (угол  $\beta$ ) ему следует для этого выбрать? Какой угол (угол  $\alpha$ ) образует траектория лодки с берегом? Сколько времени ( $t$ ) понадобится лодочнику для такой переправы? На какое расстояние ( $d$ ) снесет лодку? Какой путь ( $s$ ) проделает лодка относительно берега?*

В этой ситуации нам уже вряд ли поможет личный опыт. Даже если кто-то и переправлялся через реку, пытаясь плыть с наименьшим сносом, не факт, что он нашел правильный курс. Поэтому при решении этой задачи следует прибегнуть к рассуждениям. А рассуждения лучше проводить, когда перед глазами рисунок, на котором сразу видны все возможные варианты переправы.

– А есть ли такой чудо-рисунок?

– Есть! И главный его элемент – конус Маха.

Начинаем конструирование. Причем не со скорости  $c$ , а со скорости  $v$  (рис. 8). За секунду река снесет лодку вправо на расстояние  $v$ . После этого мы сами должны переместить лодку на расстояние  $c$ , при этом направить ее мы можем в любую сторону. Поэтому рисуем полуокружность радиусом  $c$ . Каждая точка этой кривой соответствует конкретному выбору курса. А скорость лодки относительно берега – это вектор, соединяющий точку  $O$  и выбранную нами точку на окружности.

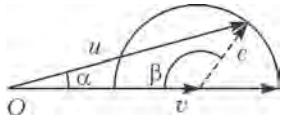


Рис. 8

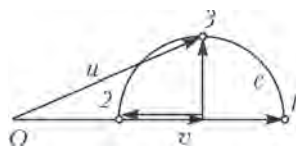


Рис. 9

Итак, все варианты налицо. Правда, конуса Маха пока еще на рисунке нет. Поработаем немного с нашим рисунком – поговорим о разных точках на нем (рис. 9).

– Точка 1 ( $\beta = 180^\circ$ ), как бы вы назвали ее?

– Такой выбор переправы можно назвать самым быстрым способом движения. Скорость лодки в этом случае относительно берега самая большая:  $u_{\max} = v + c$ . Хотя понятно, что при таком выборе направления мы никогда не переправимся через реку.

– Точку 2 ( $\beta = 0^\circ$ ) можно назвать самым медленным удалением от исходной точки. Лодка здесь движется с самой маленькой скоростью:  $u_{\min} = v - c$ .

– А точка 3 ( $\beta = 90^\circ$ ) – это точка из предыдущей задачи, т.е. точка наибыстрейшей переправы.

– Осталось совсем немного: найти на окружности точку минимального сноса. Ответ становится очевидным, если поместить наш рисунок на карту реки (рис. 10). Тогда сразу

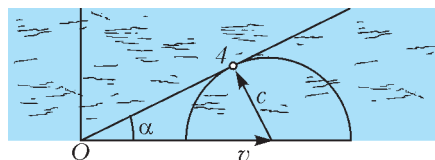


Рис. 10

видно, что снос будет минимален, если траектория лодки касается нашей окружности выбора. В результате получается точка 4 – точка переправы с минимальным сносом.

Теперь на нашей картинке появился конус Маха с углом при основании  $\alpha = \arcsin(c/v)$ .

Остальные ответы, связанные с переправой с минимальным сносом, получите сами.

Используя наши полезные рассуждения и рисунки, решите самостоятельно следующие задачи.

**Задача 7.** При переправе лодочник вел лодку так, чтобы переплыть реку как можно быстрее. А обратно он возвращался так, чтобы снос лодки был минимален. Известно, что на обратный путь он затратил в два раза больше времени. Найдите, во сколько раз скорость течения больше скорости лодки. Во сколько раз путь лодки туда больше, чем путь оттуда?

**Задача 8.** Обычно лодочник переправляется через реку за 12 мин. А когда он выбирает для переправы новый курс, составляющий угол  $90^\circ$  по отношению к первому, то он тратит на переправу всего 9 мин.

1) Сколько времени лодочник будет тратить на переправу, если будет держать курс перпендикулярно береговой линии?

2) Чему равно отношение скорости течения к скорости лодки, если и при старом и при новом курсе лодочника сносит на одно и то же расстояние?

**Задача 9.** Два лодочника выбирают разные курсы для своих лодок, но пересекают реку за одно и то же время  $t_0$ . При этом вторую лодку сносит при переправе в  $n$  раз дальше, чем первую.

1) За какое минимальное время лодочники могли бы переправляться через реку, если скорость течения в  $M$  раз больше скорости лодки?

2) При каком максимальном  $M$  это возможно?

Скорости обеих лодок в спокойной воде одинаковы.

– А если скорость лодки больше скорости реки, есть такие задачи?

– Конечно, есть. Только теперь картинка, на которой видны все варианты нашего выбора, выглядит несколько иначе (рис. 11). Но многое на этой картинке остается и от старого случая. Точка 1, по-прежнему, точка самой большой скорости лодки относительно берега, точка 2 – точка самой маленькой скорости лодки, точка 3 – точка наибыстрейшей

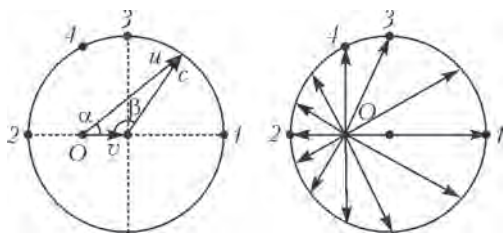


Рис. 11

переправы, а вот точку 4 теперь следует называть несколько иначе – точка переправы без сноса. Ведь теперь, когда скорость лодки больше скорости течения, нам вполне по силам на равных бороться с ним и добиться того, чтобы лодку совсем не сносило.

– Жалко только, что теперь на рисунке нет нашего хорошего знакомого – конуса Маха!

– Ну что же, коли конус Маха стал вам хорошим знакомым, это очень приятно. Однако возможно, что вы и без него уже сможете решать сложные задачи. Например, такую.

**Задача 10.** Лодочник взял за правило переправлять своих пассажиров на другой берег строго перпендикулярно береговой линии (без сноса). Сколько времени будет длиться такая переправа, если ширина реки  $L = 120$  м, скорость лодки в спокойной воде  $c = 5$  м/с, скорость течения  $v = 4$  м/с? Под каким углом относительно берега лодочнику следует направлять свою лодку, чтобы сноса не было? С какой скоростью будет перемещаться лодка относительно берега?

# Сиреневый туман...

**А. СТАСЕНКО**

**И**МЕННО ТАК НАЧИНАЕТСЯ ИЗВЕСТНАЯ СТАРАЯ ПЕСНЯ:

«Сиреневый туман над нами проплывает,  
Над тамбуром горит полночная звезда...»

Но почему туман оказался *сиреневым*?

Или вот еще из А.С.Пушкина («Буря»):

«Ты видел деву на скале  
В одежде белой над волнами...  
Когда луч молний озарял  
Ее всечасно блеском алым...»

Как же так: одежды – белые, луч молний еще белее, а в результате – блеск *алый*! Не связано ли это с тем, что «бушуя в бурной мгле, играло море с берегами ... и ветер бился и метал», т.е. с присутствием морских брызг и капель?

Но заглянем еще дальше назад – в глубь веков. В китайских и римских (оцените расстояние!) хрониках 186 года сообщается о *красном* небе. И что же? Оказывается, в ту пору произошло извержение вулкана ... в Новой Зеландии! – вообще в другом полушарии.

А в более близкие к нам времена, в 1950 году, на большей части Европы Солнце и Луна казались *голубыми* после пожаров в лесах Канады!

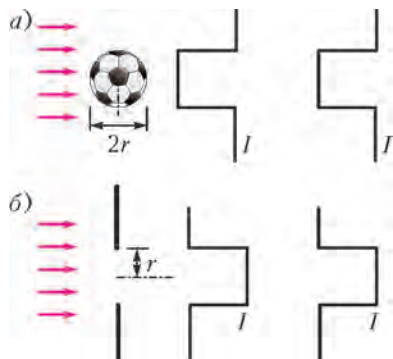


Рис.1. Распределение интенсивности света за мячом и за отверстием (геометрическая оптика)

Тут уж явно возникает подозрение о взаимодействии света с мелкими частицами.

Но – все по порядку. Представим себе, что футбольный мяч радиусом  $r$  освещается параллельными лучами света интенсивности  $I$  (рис.1,а). Тогда на белой стене появится четкий диск тени, причем это ступенчатое распределение интенсивности

света с точки зрения геометрической оптики должно быть одинаковым на любом расстоянии мяча от стенки.

А что если на пути тех же параллельных лучей поместить непрозрачный экран с отверстием радиусом  $r$  (рис.1,б)? В этом случае на белой стене получим картину, дополнительную к первой. Дополнительную в том смысле, что если вставить мяч в отверстие, то суммарная интенсивность света станет равной нулю.

Однако, это справедливо с точки зрения геометрической оптики. В ней ни слова нет о длине волны света  $\lambda$ , а ведь именно она определяет восприятие цвета – сиреневый, алый, красный, синий... Чем больше  $\lambda$ , тем волна «краснее», чем меньше – тем «синее». Представим себе то же самое отверстие радиусом  $r$  в непрозрачном экране состоящим из двух половинок площадью  $\pi r^2/2$  каждая (рис.2). Согласно принципам волновой (уже не геометрической!) оптики, эти две

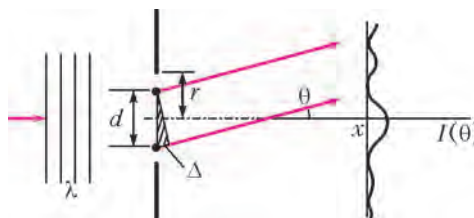


Рис.2. Интерференция от двух полудисков. Слева – падающий фронт волны (с длиной  $\lambda$ ), справа – картина распределения интенсивности за отверстием

половинки фронта волны, падающей слева на отверстие, можно считать двумя независимыми источниками вторичных волн. С этой идеи и начинается изложение принципа Френеля – великого оптика, жившего во времена Наполеона, Александра I и Пушкина.

Рассматривая эту картину издалека, будем считать, что эти две половинки излучают вторичные волны как два точечных источника, расположенных в «центре тяжести» каждого из полудисков. Расстояние между этими двумя точками обозначим буквой  $d$ . Тогда в направлении, соответствующем углу  $\theta$ , одна из этих двух волн отстанет от другой на отрезок  $\Delta = d \sin \theta$  (см. заштрихованный прямоугольный треугольник на рисунке 2). И тут возникает две возможности – эта разность хода может стать равной целому числу длин волн (четному числу полуволн):  $\Delta = m\lambda = 2m\lambda/2$  или нечетному числу длин полуволн:  $\Delta = (2n + 1)\lambda/2$ . Ясно, что в первом случае в направлениях, соответствующих углам

$$\theta_{\max}^m = \arcsin \frac{m\lambda}{d}, \quad (*)$$

эти две волны усилят друг друга, во втором – погасят. Таким образом, картина распределения интенсивности света, про-

шедшего через отверстие, т.е. так называемая интерференционная картина, принципиально отличается от той, что предсказывает геометрическая оптика. Где же правда?

С одной стороны, мы ясно видим резкую тень от луча на стене. С другой стороны, те, кто занимаются радиофизикой, точно знают, что круглая антенна радиусом  $r$ , посылающая волну на спутник, собирает энергию в пучок с характерным полууглом раствора порядка  $\arcsin \frac{\lambda}{2r}$  при  $n = 0$  (направление на 1-й минимум), а не в виде «ступеньки», как на рисунке 1,б. Ясно, что тут дело в отношениях размеров. Одно из них мы уже знаем – это дифракционный параметр  $\frac{\lambda}{r}$ . Очевидно, что другое отношение должно быть связано с тем, «близко» или «далеко» находится экран от отверстия. Измеренное в радиусах отверстия это расстояние  $x$  дает еще один безразмерный параметр  $\frac{x}{r}$ . И в результате получится, что геометрическая оптика права при  $\frac{\lambda x}{r^2} \ll 1$ , а волновая – при  $\frac{\lambda x}{r^2} \gg 1$ . (Кстати заметим, что в «Кванте» №1 за 2014 год в статье «Зачем «близоруку щуриться»?» допущена опечатка. На странице 42 последнюю формулу следует читать так:  $p = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{x}{d}$ .) Некоторые говорят, что геометрическая оптика верна при  $\lambda \rightarrow 0$ . Понятно, что это утверждение справедливо при фиксированных значениях  $x$  и  $r$ .

Но вернемся к сиреневому туману, деве на скале, синему и красному небу. Если рассмотренное выше отверстие закрыть диском или шариком того же радиуса, то свет всюду за восстановленным непрозрачным экраном исчезнет. Значит, с точки зрения дополнительной картины, на оси за одиночным шариком должна быть волна, в точности компенсирующая (гасящая) волну, которая была за отверстием в экране. Интенсивности этих двух волн одинаковы, а фазы противоположны. Двести лет назад мысль о том, что за непрозрачным экраном должно быть светлое пятно, казалась нелепой. Тем более потрясающим оказался демонстрационный опыт Араго, сделавший этот факт очевидным.

Итак, волны огибают края шарика. Это явление называется дифракцией волн на краю препятствия. Более того, оказалось, что в дифракционном пределе ( $r \ll \sqrt{\lambda x}$ ) из

параллельного пучка лучей дифракция «изымает» столько энергии, что шарик представляется имеющим площадь сечения  $2\pi r^2$ , т.е. вдвое большую, чем с точки зрения геометрической оптики. Говорят при этом, что коэффициент рассеяния равен двум:  $Q_s = 2$ .

Далее. Ясно, что с уменьшением размера шарика должна уменьшаться и доля рассеиваемой им энергии – ведь при стремлении его размера к молекулярному эта доля должна стремиться к нулю – иначе атмосфера была бы непрозрачна для солнечных лучей. А в результате связь сечения рассеяния с коэффициентом рассеяния имеет вид, качественно показанный на рисунке 3. Тут нет ничего удивительного: видна периодичность по  $\frac{r}{\lambda}$ , так напоминающая соотношение (\*); видно стремление к нулю

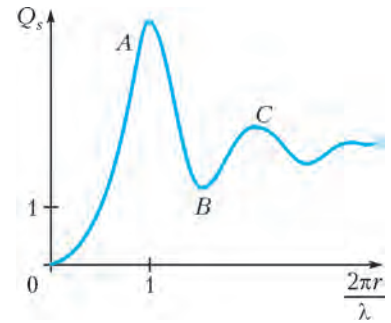


Рис.3. Качественная картина взаимосвязи коэффициента рассеяния и дифракционного параметра

при  $\frac{r}{\lambda} \rightarrow 0$ . И, конечно, виден вполне ожидаемый максимум, когда длина волны сравнима с размером шарика. Кстати, в случае водяных капель этот максимум почти в четыре раза превышает геометрическое сечение большого круга ( $Q_s \approx 4$ ).

Теперь все понятно. Поскольку белый свет молний или Солнца содержит непрерывный набор длин волн, радиус частиц или капель, рассеивающих этот свет, может оказаться соответствующим максимальному значению  $A$  на рисунке 3 при длине волны красного света, в то время как соседний минимум  $B$  окажется соответствующим синему цвету ( $\lambda_{\text{син}} < \lambda_{\text{красн}}$ ) – вот и получается «блеск алый». А сиреневый цвет – это смесь красного и фиолетового (проверьте на акварельных красках). Он может получиться, когда размеры капель таковы, что мы попадаем в два соседних максимума  $A$  и  $C$ .

Остальные случаи необычных окрасок запыленного неба Читатель сможет теперь объяснить самостоятельно.

## НАША ОБЛОЖКА

### Как Архимед взвесил параболу?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

«Архимед желает читателю радоваться», – так начиналась бы эта статья, если бы ее автором был Архимед.

Вычислению площади (квадратуры) сегмента параболы было посвящено письмо Архимеда Досифею в Александрию. В нем Архимед привел два способа вычисления – геометрический и механический. С геометрическим способом, в котором площадь сегмента параболы представляется в виде бесконечной последовательности вписанных в него треугольников, можно познакомиться, например, в статье А.Бендুকидзе, опубликованной в «Кванте» №7 за 1971 год. Здесь же приводится популярное изложение механического способа, который иногда называют механическим интегрированием.

Нарисуем параболу  $y = ax^2$  на листе плотной бумаги и вырежем часть листа между кривой и осью  $x$  в диапазоне от

$x = 0$  до  $x = l$ . Теперь положим вырезанную фигуру на правую чашу весов так, чтобы ее центр тяжести находился под точкой подвеса чаши, и уравновесим ее грузом на левой чаше (рис.1). Очевидно, если знать вес единицы площади использованного листа бумаги, то «вес параболы» даст нам величину ее площади  $S$ .

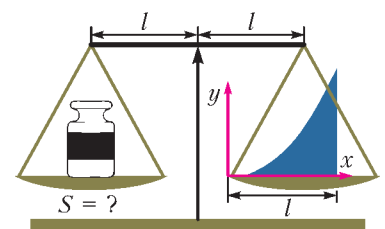


Рис.1

Чтобы найти зависимость «веса параболы» от величин  $a$  и  $l$ , вместо левой чаши прикрепим к рычагу треугольник  $AOB$ , вырезанный из той же бумаги, что и наша парабола (рис.2).

(Продолжение см. на с. 44)

Задача о точке Торричелли – красивая и естественная, настоящая жемчужина геометрии. Она уже не раз обсуждалась на страницах «Кванта» (см., например, статью В.Протасова и В.Тихомирова «Пространство  $L_p$  и замечательные точки треугольника» в «Кванте» №2 за 2012 г.).

Но иногда интересно собрать вместе различные подходы к таким задачам, чтобы увидеть связь между разными областями и ощутить единство математики.

Именно в таком ключе автор публикуемой ниже статьи и предлагает взглянуть на точку Торричелли.

## Еще раз о точке Торричелли

**Л. РАДЗИВИЛОВСКИЙ**

### Введение

Вот одна из моих любимых геометрических задач:

**Задача.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите такую точку  $T$ , что сумма расстояний от нее до вершин треугольника,  $AT + BT + CT$ , будет наименьшей.

Я коллекционирую ее решения, пока что в коллекции 6 штук. Если верить Википедии (а первоисточников я не читал), то Пьер Ферма предложил эту задачу, а Эванджелиста Торричелли ее решил.

Решения 1 и 2 я прочел в старых выпусках «Кванта», решение 3 понятно тем, кто изучал высшую математику, решение 4 нашел А.Гладких, решение 5 придумал мой отец, а решение 6 я узнал из статьи Г.Ганчева и Н.Николова в журнале «Математическое просвещение» (третья серия, выпуск 12). О шестом решении мне сообщил А.Заславский, когда статья уже была частично написана, он же высказал ряд ценных замечаний по поводу этой статьи, за что я ему очень признателен. Конечно, какие-то из этих решений, видимо, были придуманы гораздо раньше, поскольку задача очень старая. За последние 350 лет ее решало много людей, поэтому установить первого автора той или иной идеи невозможно.

### Каков же ответ?

Оказывается, ответ в этой задаче разбивается на два случая. Первый случай (он менее интересен) – когда у треугольника есть угол, не меньший  $120^\circ$  (образно говоря, «очень тупой угол»). Тогда вершина этого угла и будет искомой точкой.

Второй случай, когда все углы треугольника меньше  $120^\circ$ , более интересен. В этом случае точка  $T$  задается условием: все стороны треугольника видны из нее под углом  $120^\circ$  (такая точка носит имя Торричелли, иногда ее называют точкой Ферма). Другими сло-

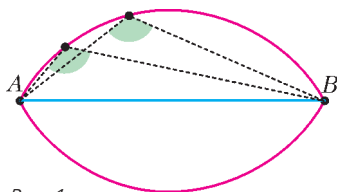


Рис. 1

вами,  $\angle ATB = \angle ATC = \angle BTC = 120^\circ$ . Построить ее легко. Дело в том, что геометрическое место точек, из которых отрезок  $AB$  виден под одним и тем же углом, состоит из двух дуг окружностей, проходящих через точки  $A$  и  $B$  (рис. 1). Искомая точка лежит внутри треугольника, поэтому остается одна дуга или ее часть. Это дуга окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника, примыкающего к стороне  $AB$ . Итак, строим на сторонах треугольника вовне равносторонние треугольники, описываем вокруг них окружности и смотрим на их дуги, лежащие внутри исходного треугольника. Каждая из этих дуг содержит нашу точку (рис. 2). В действительности, можно определить нашу точку как пересечение любых двух из этих дуг. Ведь если углы, под которыми видны две стороны, равны  $120^\circ$ , то на третью сторону остается тот же угол. Поэтому эти три дуги пересекаются в одной точке. Основная трудность – доказать, что построенная точка и есть та, которую требуется найти в задаче.

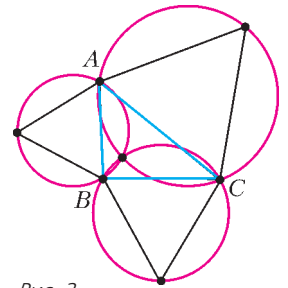


Рис. 2

### Случай «очень тупого угла»

Рассмотрим сначала первый, менее интересный вариант, чтобы потом про него забыть (впрочем, каждое из приведенных ниже шести доказательств можно, несколько видоизменив, применить и к этому случаю). Предположим что  $\angle ABC \geq 120^\circ$ . Тогда нужно доказать, что для всякой точки  $X$ , отличной от  $B$ , будет выполняться неравенство

$$AB + CB < AX + BX + CX.$$

Пусть  $P, Q$  – проекции точки  $X$  на прямые  $AB, BC$  соответственно. Если точка  $B$  находится между  $A$  и  $P$  (рис.3), то

$$AX \geq AP > AB,$$

$$BX + CX \geq BC.$$

Складывая эти неравенства, получаем требуемое. Значит, очевидно только тот случай, когда  $P$  находится на луче  $BA$ . По тем же причинам будем считать, что  $Q$  находится на луче  $BC$  (рис.4). Тогда в четырехугольнике  $XPBQ$  углы  $P$  и  $Q$  – прямые,  $\angle B \geq 120^\circ$ , а  $\angle X \leq 60^\circ$ . Мы докажем что

$$BX \geq BP + BQ. \quad (*)$$

Прибавив к неравенству (\*) очевидные неравенства

$$AX \geq AP,$$

$$CX \geq CQ,$$

получим искомое утверждение. Равенство в последних двух неравенствах достигается, только если точка  $X$  лежит и на прямой  $AB$ , и на прямой  $BC$ , т.е. совпадает с их точкой пересечения  $B$ .

Итак, осталось доказать неравенство (\*). Это можно сделать, например, такими двумя способами.



**Первый способ**

Повернем треугольник  $BXP$  вокруг точки  $X$  так, чтобы его сторона  $XP$  попала на прямую  $XQ$ . Обозначим полученный треугольник  $B'XP'$  (рис.5). Заметим, что  $\angle PXQ = 180^\circ - \angle PBQ \leq 60^\circ$ . По построению,  $\angle P'XP = \angle PXB + \angle BXP' = \angle P'XB' + \angle P'XB = \angle B'XB$ , т.е. и  $\angle B'XB \leq 60^\circ$ .

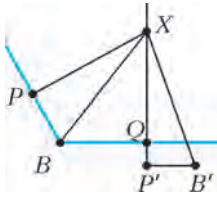


Рис. 5

Значит,  $B'B$  не может быть наибольшей стороной треугольника  $B'XB$ , и поскольку отрезки  $BX$  и  $B'X$  равны, то  $B'B \leq BX$ .

С другой стороны, отрезок  $BB'$  не меньше его проекции на прямую  $BQ$ , т.е. не меньше суммы  $BQ + P'B'$ .

Итак,  $BX \geq BB' \geq BQ + P'B' = BQ + BP$ , что и требовалось доказать.

**Второй способ**

Пусть  $\vec{u}, \vec{v}$  – единичные векторы, выходящие из точки  $B$  в направлении точек  $A, C$  соответственно. Поскольку угол между этими векторами не меньше  $120^\circ$ , то длина вектора  $\vec{u} + \vec{v}$  не больше 1. Пользуясь свойствами скалярного произведения векторов, получаем

$$BP + BQ = (\vec{BX}, \vec{u}) + (\vec{BX}, \vec{v}) = (\vec{BX}, \vec{u} + \vec{v}) \leq BX,$$

что и требовалось.

**Более интересный случай**

Переформулируем нашу задачу так:

*Если из внутренней точки  $T$  треугольника  $ABC$  все стороны видны под равными углами, то сумма расстояний от  $T$  до вершин  $A, B, C$  меньше, чем от любой другой точки.*

Перейдем к решениям.

**Первое решение (физика)**

Может, это и не решение в полной математической строгости, а интуитивное объяснение? Судите сами, но мне оно нравится.

Итак, пусть наш треугольник нарисован на горизонтальной доске. Сделаем в каждой вершине отверстие. Через каждое отверстие протянем веревку и свяжем эти три веревки где-нибудь внутри треугольника. К противоположным концам веревок прикрепим одинаковые гири по 1 кг (рис.6). Теперь опустим эту систему, и она, согласно законам физики, придет в положение с минимумом потенциальной энергии.

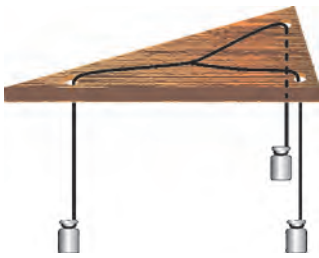


Рис. 6

Потенциальная энергия пропорциональна суммарной высоте грузов над землей. Значит, суммарная высота грузов будет минимальна, т.е. суммарная длина веревок от отверстий до гирь максимальна. Следовательно, суммарная длина веревок внутри треугольника, равная сумме расстояний от узла до вершин, минимальна. Таким образом, эта физическая система решает нашу задачу.

С другой стороны, сумма сил, действующих на узел, будет равна нулю. Сила равна натяжению веревок и направлена вдоль веревок. Натяжение веревок равно весу груза, поскольку вес и натяжение, нейтрализуя друг друга, держат груз в неподвижности. Значит, силы, действующие на узел, – это три вектора одинаковой длины, в сумме дающие ноль.

**Упражнение 1.** Если сумма трех единичных векторов равна нулю, то углы между ними равны по  $120^\circ$ .

Из предыдущих рассуждений и упражнения 1 следует, что углы между веревками равны  $120^\circ$ , что и завершает доказательство.

**Второе решение (классическая геометрия: поворот)**

Пусть  $X$  – произвольная точка. Построим на стороне  $AB$  во внешнюю сторону правильный треугольник  $ABF$  (рис.7).

Рассмотрим поворот вокруг вершины  $A$  на  $60^\circ$ , который переводит вершину  $B$  в точку  $F$ . Тот же поворот переведет точку  $X$  в некую точку  $H$ . Треугольники  $ABF$  и  $AHX$ , очевидно, равносторонние, а  $BX = FH$ , поскольку наш поворот переводит  $BX$  в  $FH$ . Значит,  $AX + BX + CX = HX + FH + CX \geq FC$ , поскольку прямой путь  $FC$ , конечно, не длиннее, чем путь вдоль ломаной  $FHXC$ . Равенство может достигаться, только если точки  $H, X$  лежат на отрезке  $FC$ . Но тогда  $\angle CXA$  дополняет до развернутого угла угол равностороннего треугольника, а значит, он равен  $120^\circ$ . По той же причине,  $\angle FHA = 120^\circ$ . Но  $\angle FHA = \angle BXA$ . Итак, минимум достигается, когда  $\angle BXA$  и  $\angle CXA$  равны  $120^\circ$ , что и требовалось.

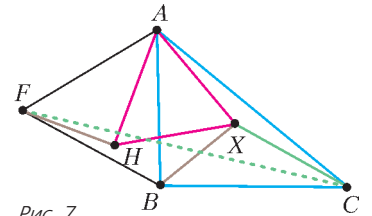


Рис. 7

Рассматривая эту картинку, можно увидеть другие способы построения точки Торричелли. Например, из этого решения следует, что она лежит на прямой  $CF$ . Впрочем, это можно было заметить и раньше: по теореме о вписанном угле (в окружности, проходящей через точки  $A, B, F, T$ ),  $\angle FTA = 60^\circ$ , поэтому углы  $FTA$  и  $ATC$  – смежные. Кроме того, отрезок  $CF$  равен той самой минимальной сумме расстояний. Аналогично, если мы построим равносторонние треугольники  $BCD$  и  $ACE$

вовне на других двух сторонах треугольника, то отрезки  $AD$  и  $BE$  будут иметь такую же длину и будут проходить через точку Торричелли, причем отрезки  $AD, BE, CF$  будут пересекаться в точке  $T$  под равными углами (рис.8). Получается, что через точку Торричелли проходят уже 6 линий: прямые  $AD, BE, CF$  и окружности, описанные вокруг треугольников  $ABF, BCD, ACE$ ! Тем самым, можно строить точку Торричелли как пересечение любых двух из этих линий – например, двух прямых.



Рис. 8

**Упражнение 2.** Пусть  $KLM$  – равносторонний треугольник,  $Z$  – точка на дуге  $KM$  его описанной окружности. Докажите, что  $ZK + ZM = ZL$ .

*Указание:*  $KLM$  – равносторонний треугольник, построенный на стороне  $KM$  треугольника  $KZM$ .

**Третье решение (математический анализ)**

Для третьего решения нам понадобятся некоторые сведения из математического анализа (кто боится производных, может его пропустить). Рассмотрим функцию от двух переменных  $f(x, y)$ , определенную для точек  $X$  плоскости с координатами  $(x, y)$ . Если считать переменную  $y$  постоян-

ной, эта функция превращается в обычную функцию от одной переменной  $x$ . Производная полученной функции (если она существует) называется *частной производной* по  $x$  функции  $f$  (обозначение:  $\partial f / \partial x$ ). Аналогично определяется частная производная по  $y$ .

*Градиентом* функции называется вектор, составленный из частных производных:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{pmatrix}.$$

Вспомним, что для функции одной переменной  $f(x)$  (определенной на числовой прямой) в точке максимума или минимума производная должна обращаться в ноль (если она существует). Аналогично, в точках максимума или минимума функции двух переменных ее градиент должен обращаться в ноль.

Рассмотрим функцию расстояния от точки  $A$ , т.е. функцию  $f(X) = AX$ . Ее градиент имеет длину 1 и сонаправлен с вектором  $AX$ . Значит, градиент функции суммы расстояний  $AX + BX + CX$  равен сумме трех единичных векторов, смотрящих в направлениях  $AX, BX, CX$ . В точке минимума этой функции сумма этих трех единичных векторов должна быть равна нулю. Согласно упражнению 1, это возможно, только если углы между этими векторами равны по  $120^\circ$ .

На самом деле, приведенное рассуждение не полно, так как равенство градиента нулю является необходимым, но не достаточным условием минимума (может быть максимум или вовсе отсутствие экстремума). Завершить решение можно, используя понятие *выпуклости* функции (функции  $AX, BX, CX$  – выпуклы вниз, и значит, их сумма также выпукла вниз, а в той точке, где градиент равен нулю, достигается глобальный минимум выпуклой вниз функции).

**Четвертое решение (геометрия коник)**

Для четвертого доказательства нам потребуется *оптическое свойство эллипса*.

*Эллипс* – это геометрическое место точек  $X$ , для которых при некоторых фиксированных точках  $A, B$  и расстоянии  $l > AB$  выполняется равенство

$$AX + BX = l.$$

Точки  $A, B$  называются *фокусами* эллипса.

**Оптическое свойство эллипса.** Пусть  $X$  – точка на эллипсе,  $A$  и  $B$  – фокусы этого эллипса. Тогда отрезки  $AX$  и  $BX$  пересекают касательную в точке  $X$  под одним и тем же углом.

У этого факта можно найти несколько разных физических смыслов. Например: бильярдный шарик, выпущенный из одного фокуса эллиптического бильярдного стола, отразившись от стенки, пройдет через второй фокус. Или: два человека, находящиеся в разных фокусах большой эллиптической скорлупы, смогут между собой говорить без микрофона – что один скажет, то другой и услышит, с той же громкостью. Или: если зажечь свечку в фокусе зеркальной эллиптической скорлупы, то мы и во втором фокусе увидим такую же горящую свечку, поскольку все лучи, выходящие из «настоящей» свечки, пройдут и через второй фокус. По-видимому, именно последний пример дал название этой теореме. Заметим, что из-за волновой структуры света и звука, для последних двух эффектов важно и первое свойство эллипса, которое мы взяли за определение. Лучи, выпущенные из одного фокуса, не просто пройдут через другой фокус, но и придут туда в одинаковой фазе.

**Доказательство оптического свойства эллипса.** Пусть  $A$  и  $B$  – фокусы,  $X$  – точка на эллипсе (рис.9). Проведем через точку  $X$  касательную к эллипсу и отразим точку  $B$  относи-

тельно этой касательной, получим точку  $B'$ . По сути, нужно доказать, что  $X$  лежит на отрезке  $AB'$ .

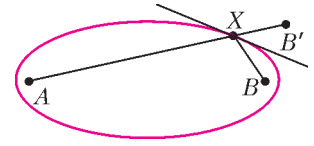


Рис. 9

Предположим, что это не так.

Тогда возьмем точку  $T$  пересечения  $AB'$  и касательной. Заметим, что  $AT + TB = AT + TB' < AX + XB' = AX + XB$ . Значит, точка на касательной лежит внутри эллипса – противоречие.

**Примечание.** На самом деле, мы здесь воспользовались интуитивно очевидным фактом, что эллипс – выпуклая фигура. Это можно вывести, например, из известного факта о том, что эллипс является сечением цилиндра или конуса. Перейдем к решению.

Пусть  $T'$  – точка, сумма расстояний от которой до вершин  $A, B, C$  треугольника минимальна. (Конечно, для доказательства существования такой точки нужно применить некоторые факты из анализа.) Нарисуем окружность с центром в  $C$ , проходящую через  $T'$ , а также эллипс с фокусами  $A, B$ , проходящий через  $T'$  (рис.10).

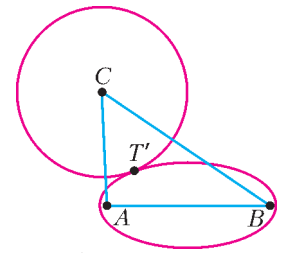


Рис. 10

Если бы у этих круга и эллипса была общая внутренняя точка  $X$ , то выполнялись бы неравенства  $CX < CT', AX + BX < AT' + BT'$ , а значит, сумма расстояний от  $X$  до вершин треугольника была бы меньше, чем от  $T'$ , чего не может быть. Поэтому окружность касается эллипса. Общая касательная образует равные углы с  $AT'$  и  $BT'$  и перпендикулярна радиусу. Значит  $\angle AT'C = \angle BT'C$ .

Аналогично можно доказать, что  $\angle AT'B = \angle BT'C$ , т.е. точка  $T'$  совпадает с точкой Торричелли.

**Пятое решение (классическая геометрия: площади)**

Нам понадобится известная лемма:

**Лемма 1.** Пусть точка  $X$  находится внутри (или на сторонах) равностороннего треугольника  $KLM$  и  $h$  – высота этого треугольника, а  $k, l, m$  – расстояния от  $X$  до прямых  $LM, KM, KL$  соответственно. Тогда  $k + l + m = h$ . Если же  $X$  находится снаружи треугольника  $KLM$ , то  $k + l + m > h$ .

**Доказательство леммы 1.** Пусть сторона равностороннего треугольника равна  $a$ .

Если  $X$  находится внутри, то треугольник  $KLM$ , площадь которого равна  $ah/2$ , состоит из треугольников  $XLM, XKM, XKL$ , площади которых равны  $ak/2, al/2, am/2$  соответственно. Поэтому

$$\frac{ak}{2} + \frac{al}{2} + \frac{am}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Осталось умножить обе части равенства на 2 и разделить на  $a$ .

Если же  $X$  находится снаружи, то треугольники  $XLM, XKM, XKL$  вместе покрывают треугольник  $KLM$ , но также содержат кусочки вне  $KLM$ , так что равенство превращается в строгое неравенство.

**Упражнение 3.** Точки  $A_1, A_2, \dots, A_{2M}$  делят окружность на  $2M$  равных дуг. Пусть  $X$  – произвольная точка внутри круга. Отрезки  $XA_1, XA_2, \dots, XA_{2M}$  делят круг на  $2M$  областей. Каждую область красят в черный или белый цвет так, чтобы соседние области имели разные цвета. Докажите, что сумма белых площадей равна сумме черных площадей.

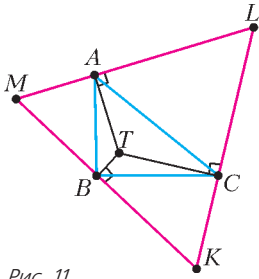


Рис. 11

Теперь мы готовы к решению. Проведем к прямым  $AT, BT, CT$  перпендикуляры в точках  $A, B, C$  соответственно. Получим три прямые, которые задают равносторонний треугольник  $KLM$  (рис. 11).

Рассмотрим точку  $X$ , отличную от  $T$ . Сумма расстояний от  $X$  до сторон треугольника  $KLM$  такая же или даже больше, чем от  $T$ . Расстояния от  $X$  до точек  $A, B, C$  не

меньше, чем соответствующие расстояния от  $X$  до сторон  $KLM$  (скажем, расстояние от  $X$  до прямой  $LM$  не больше, чем  $XA$ ). Поэтому  $AX + BX + CX \geq AT + BT + CT$ .

Это неравенство может обратиться в равенство, только если основания перпендикуляров, опущенных из  $X$  на стороны треугольника  $KLM$ , – это точки  $A, B, C$ . Но это бы означало, что  $X$  лежит одновременно на  $AT, BT, CT$ , т.е. что  $X$  – это и есть  $T$ .

**Упражнение 4.** Пусть  $A_1A_2 \dots A_n$  – правильный  $n$ -угольник,  $R$  – радиус описанной вокруг него окружности,  $X$  – произвольная точка. Докажите, что

$$XA_1 + XA_2 + \dots + XA_n \geq nR.$$

**Шестое решение (геометрия: изогональное сопряжение)**

Для шестого доказательства понадобится *изогональное сопряжение*.

Пусть дан треугольник  $ABC$ . Зададим каждую точку на плоскости тройкой чисел  $(x, y, z)$ : расстояниями до прямых  $BC, AC, AB$  соответственно. Расстояния возьмем со знаками: будем считать расстояние до стороны положительным, если оно находится по ту же сторону плоскости, что и третья вершина, и отрицательным, если наоборот.

**Упражнения**

5. Докажите, что соотношение  $x/k = y/l$  при заданных  $k, l$  задает прямую, проходящую через  $C$ .

6. Докажите, что соотношение  $x/k = y/l = z/m$  при заданных  $k, l, m$  задает точку. Если числа  $k, l, m$  положительны, то эта точка находится внутри треугольника. Поэтому тройка  $(x, y, z)$  задает точку однозначно. Более того, не всякая тройка задает точку, а только такая, которая удовлетворяет равенству  $xa + yb + zc = 2S$ , где  $a, b, c$  – стороны треугольника, а  $S$  – его площадь.

Если вы решили последние два упражнения, то вам будет легко понять следующее определение:

**Определение.** Пусть расстояния (со знаками) от точки  $P$  до сторон треугольника равны  $x, y, z$ , а расстояния (со знаками) от точки  $Q$  до сторон треугольника равны  $k, l, m$ . Мы будем говорить, что точки  $P$  и  $Q$  *изогонально сопряжены* друг другу (относительно треугольника  $ABC$ ), если  $kx = ly = mz$ .

Из упражнения 5 видно, что если  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены, то прямые  $AP$  и  $AQ$  симметричны друг другу относительно биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  (и аналогично,  $BP$  и  $BQ$  симметричны друг другу относительно биссектрисы угла  $B$ , а  $CP$  и  $CQ$  симметричны друг другу относительно биссектрисы угла  $C$ ). Отсюда получается вывод, который раньше мог показаться неочевидным:

Пусть  $P$  – произвольная точка, отличная от вершин треугольника  $ABC$ . Если отразить прямые  $AP, BP, CP$  относительно соответствующих биссектрис треугольника  $ABC$ , то три полученные прямые либо будут пересекаться в одной точке (и тогда эта точка изогонально сопряжена к  $Q$ ), либо будут параллельны.

Часто именно на основе последнего геометрического факта дают определение изогонального сопряжения.

**Упражнение 7\*.** Докажите, что если эллипс с фокусами  $F, G$  вписан в треугольник  $ABC$ , то  $F, G$  изогонально сопряжены относительно этого треугольника.

Много интересного про изогональное сопряжение можно прочесть в книге В.В.Прасолова «Точки Брокера и изогональное сопряжение».

Докажем следующую известную лемму:

**Лемма 2.** Пусть точки  $P$  и  $Q$  изогонально сопряжены относительно треугольника  $ABC$ , а  $K, L, M$  – основания перпендикуляров, опущенных из  $Q$  на прямые  $BC, CA, AB$ . Тогда прямая  $AP$  перпендикулярна  $LM$ , прямая  $BP$  перпендикулярна  $KM$ , прямая  $CP$  перпендикулярна  $KL$ .

**Доказательство леммы 2.** Достаточно доказать, что прямая  $AP$  перпендикулярна  $LM$ , остальное аналогично. Рассмотрим случай, когда точки  $P$  и  $Q$  лежат внутри треугольника, а  $M$  и  $L$  – на его сторонах (рис. 12), остальные случаи разбираются аналогично. Как мы знаем, углы  $M\hat{A}P$  и  $Q\hat{A}L$  равны. А поскольку четырехугольник  $MALQ$  вписанный (в окружность с диаметром  $AQ$ ), углы  $Q\hat{M}L$  и  $Q\hat{A}L$  также равны. Так как углы  $M\hat{A}P$  и  $Q\hat{M}L$  равны, то угол между  $AP$  и  $ML$  равен углу между  $AM$  и  $MQ$ , что и требовалось. Лемма доказана.

Еще нам потребуется тот факт, который сразу вытекает из формулы площади четырехугольника: площадь четырехугольника не больше, чем половина произведения его диагоналей, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда диагонали перпендикулярны.

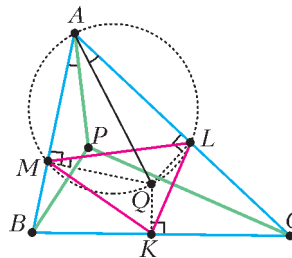


Рис. 12

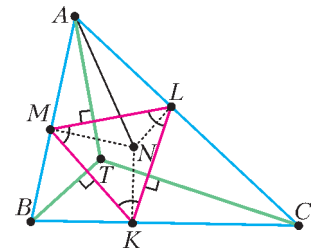


Рис. 13

Возвратимся к нашей задаче о точке Торричелли  $T$  и обозначим через  $N$  изогонально сопряженную к ней точку (эта точка называется точкой Аполлония). Пусть  $K, L, M$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $N$  на прямые  $BC, CA, AB$  соответственно (рис. 13). По доказанной нами лемме, стороны треугольника  $KLM$  перпендикулярны прямым  $AT, BT, CT$ , а значит, они образуют между собой углы в  $60^\circ$ . Следовательно,  $KLM$  – равносторонний треугольник, длину его стороны обозначим через  $k$ . Для произвольной точки  $X$  имеем

$$k \cdot (AX + BX + CX) = LM \cdot AX + KM \cdot BX + KL \cdot CX \geq 2(S_{LAMX} + S_{KBMX} + S_{KCLX}) \geq 2S_{ABC}.$$

Значит,  $AX + BX + CX \geq 2S_{ABC}/k$ . Равенство достигается, когда прямые  $AX, BX, CX$  перпендикулярны  $LM, KM, KL$  соответственно, т.е. совпадают с прямыми  $AT, BT, CT$ . А это и значит, что  $X$  и  $T$  совпадают.

Читатель может усмотреть связь между последними двумя решениями (треугольники, обозначенные  $KLM$  в этих решениях, гомотетичны).

**Упражнения**

8. Пусть  $a, b, c$  – стороны некоторого треугольника, причем  $a$  – самая маленькая сторона. Обозначим расстояния от некото-

рой внутренней точки треугольника до его вершин через  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Докажите, что  $p + q + r < b + c$ .

9. Найдите точку, сумма расстояний от которой до четырех данных точек минимальна (нужно рассмотреть два случая: когда точки образуют выпуклый четырехугольник и когда одна точка лежит в треугольнике из трех других точек).

## Снова о рыцарях и лжецах

Л.БОЙКО, М.БОЙКО

**НАВЕРНЯКА ЧИТАТЕЛЬ ВСТРЕЧАЛ ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ** о рыцарях, которые всегда говорят правду, и лжецах, которые всегда врут.

Иногда в подобных задачах появляются и другие персонажи.

### Кто такие хитрецы?

**Задача 1** (XXVIII Турнир городов). *Известно, что лжецы всегда врут, рыцари всегда говорят правду, а хитрецы могут и врать, и говорить правду. Вы можете задавать вопросы, на которые возможен ответ «да» или «нет» (например: «Верно ли, что этот человек – хитрец?»). Перед вами трое – лжец, рыцарь и хитрец, которые знают, кто из них кто. Как и вам это узнать?*

У этой задачи есть несколько решений. Перед тем как прочесть одно из них в следующем абзаце, попробуйте придумать свое!

Ключом к решению может стать некоторый вопрос, заданный каждому из трех людей, ответ на который отличит рыцаря от лжеца. Например, спросим у каждого из трех людей: «Вы хитрец?» Рыцарь ответит «нет», лжец ответит «да». Что бы ни ответил хитрец, среди трех полученных нами ответов есть либо единственное «нет», либо единственное «да». В первом случае мы однозначно определяем рыцаря, спрашивая которого далее легко добыть информацию про остальных двух людей. Во втором случае мы однозначно определяем лжеца. Далее, спрашивая его про остальных людей (с учетом того, что ответы лжеца противоположны истине), мы опять узнаем информацию про остальных людей.

**Упражнение** (XXVIII Турнир городов). Пусть в условиях задачи 1 перед вами четверо – лжец, рыцарь и два хитреца (все четверо знают, кто из них кто). Докажите, что хитрецы могут договориться отвечать так, что вы, спрашивая этих четверых, ни про кого из них не узнаете наверняка, кто он.

### Языковые трудности

Но что, если вы не вполне хорошо знаете местный язык?

**Задача 2.** *Часть жителей некоего острова – рыцари, остальные – лжецы. Островитяне понимают наш язык, а мы про язык островитян знаем лишь, что в нем одно из слов «йа» и «ва» означает «да», а другое – «нет» (но не помним точно, как именно). Пусть мы встретили двух аборигенов, один из которых – рыцарь, а другой – лжец. Сможем ли мы, задав всего один вопрос (предполагающий ответ «да» или «нет», т.е. «йа» или «ва»), узнать, кто из них кто?*

Хотелось бы расширить свою коллекцию решений замечательной задачи о точке Торричелли. Если вы найдете еще одно красивое решение, присылайте его, пожалуйста, автору по адресу lev78@hotmail.com

Наш вопрос должен быть «индикатором» рыцарей и лжецов: т.е. либо рыцари всегда на него должны отвечать «йа», а лжецы – всегда «ва», либо наоборот. Зададим любому из аборигенов вопрос «Йа – это Да?»

**Вариант 1.** Пусть «йа» означает «да». Тогда рыцарь на такой вопрос должен отвечать «да», т.е. «йа». Лжец же должен ответить на такой вопрос «нет», т.е. «ва».

**Вариант 2.** Пусть «йа» означает «нет». Тогда рыцарь на такой вопрос отвечает «нет», т.е. это опять же «йа»! А лжец должен ответить «да», т.е. снова «ва»!

Итак, рыцарь на наш вопрос всегда отвечает «йа», а лжец – «ва». Задача решена.

### Немного истории

В 1992 году американский философ и логик Джордж Булос опубликовал задачу, которую он назвал «Самой сложной логической задачей». Внешне «Самая сложная задача» похожа на разобранный выше задачу 1, но в ней имеется дополнительная сложность, которая была в задаче 2: персонажи понимают наш язык, но отвечают нам исключительно на своем языке, который непонятен нам.

Дж.Булос называет персонажей мифическими богами, мы же позволим себе сохранить более привычные персонажи. Кроме того, это кажется нам более естественным, поскольку автором «Самой сложной задачи» Дж.Булос указывает Рэймонда Смаллиана. Нам неизвестно, действительно ли это так, но безусловно Р.Смаллиан – наиболее известный популяризатор задач такого рода. Авторы настоящей статьи с большим интересом в школе решали логические задачи из книг Р.Смаллиана. В русском переводе этой книги, как правило, использовались именно такие персонажи: рыцари и лжецы.

### Постановка «Самой сложной логической задачи»

Итак, дадим точную формулировку «Самой сложной логической задачи».

**Задача 3.** *На острове Йава люди делятся на три типа: рыцари – те, кто всегда говорят правду; лжецы – те, кто всегда врут; и хитрецы – те, кто могут говорить как правду, так и ложь. Предположим, перед нами три человека – мистер А, мистер Б, мистер В. Мы знаем, что среди них ровно один рыцарь, один лжец и один хитрец, но мы не знаем, кто из них кто. Требуется определить, кто из людей – рыцарь, кто – лжец, а кто – хитрец, задав не более трех вопросов. Вопросы должны быть такими, чтобы на них можно было ответить «да» или «нет». Каждый вопрос задается только одному человеку. Дополнительная сложность состоит в том, что островитяне понимают наш язык, но отвечают нам исключительно на своем языке. Мы знаем, что в этом языке есть два слова «йа» и «ва», которые означают «да» и «нет», но мы не знаем, какое именно слово означает «да», а какое – «нет».*

Дадим несколько пояснений к формулировке, которые указывает в своей статье Дж.Булос.

• Можно задавать одному человеку более чем один вопрос (в таком случае другим людям может быть не задано ни одного вопроса).

• Каков будет следующий вопрос и кому он будет задан, может зависеть от ответа на предыдущий вопрос.

• Нельзя задавать вопросы-парадоксы, на которые можно ответить и «да» и «нет» или никак нельзя ответить. Например, «Ты сейчас ответишь «йа»?»

• Хитрец отвечает на вопросы совершенно произвольно. Можно считать, что каждый раз он подбрасывает мысленно монетку и если выпадает орел – он отвечает правду, а если решка – лжет.

Добавим к этому, что, конечно же, мистеры А, Б и В знают друг друга и знают, кто из них лжец, кто рыцарь, а кто хитрец.

Перед тем как изложить решение, введем две мысленные конструкции.

### Мистер Йа, мистер Ва и мистер Хи

Выше мы назвали рыцарем человека, который всегда говорит правду. Другими словами можно сказать так: рыцарь – это человек, который отвечает «да», если утверждение, сформулированное в вопросе, истинно. В то же время лжец – это тот, кто отвечает на такое утверждение «нет».

Вспомним, что островитяне используют свой язык. Таким образом, на вопрос, в котором сформулировано истинное утверждение, и лжец и рыцарь отвечают либо всегда «йа», либо всегда «ва». Тому, кто отвечает «йа», дадим второе имя – мистер Йа. А того, кто отвечает всегда «ва», будем называть мистер Ва. Наконец, хитреца будем называть мистер Хи.

Заметим, что мы не можем знать о мистере Йа, рыцарь он или лжец, но сами островитяне А, Б и В должны знать, кто из них кто. Поэтому мы можем использовать новые имена в вопросах. Например, мы можем спросить у мистера А: «Ты являешься мистером Йа?» или спросить у него же: «Мистер Б – это мистер Ва?»

### Колода карт

Теперь возьмем три одинаковых листочка бумаги и на первом напишем «мистер Йа», на втором – «мистер Ва», на третьем – «мистер Хи». Получим три карты – карту Йа, карту Ва и карту Хи.



а) Карты

б) Колода карт

Естественным образом получается соответствие между людьми и картами. Таким образом, если в вопросе встретится понятие «карта мистера А», островитяне должны понимать это так: нужно посмотреть, кто такой мистер А – мистер Йа, Ва или Хи, – и найти карту, на которой написано соответствующее имя. Аналогично надо поступать, если в вопросе присутствует понятие «твоя карта».

Теперь сложим эти три карты в колоду: сверху карта Йа, потом карта Ва и нижняя – карта Хи. Если у нас нет бумаги и мы не можем изготовить такую колоду, мы должны попросить островитянина сделать мысленный эксперимент: представить эти три карты именно в таком порядке. Почему выбран именно такой порядок карт? Чуть позже мы дадим этому пояснение.

В дальнейшем в вопросах будет встречаться понятие «одна карта лежит в колоде на другой». В данном случае мы

понимаем это так: карта находится в колоде выше другой, и эти две карты являются соседними в колоде. Таким образом, в нашей колоде карта Йа лежит на карте Ва, а карта Ва лежит на карте Хи. Но карта Йа НЕ лежит на карте Хи.

Теперь мы можем перейти непосредственно к вопросам, которые должны определить, кто из островитян кто.

### Решение задачи 3

#### Первый вопрос

Спросим у мистера А следующее:

«Лежит ли твоя карта в колоде на карте мистера Б?»

Докажем, что в случае ответа «йа» на этот вопрос, мистер Б – не хитрец (он рыцарь или лжец), а в случае ответа «ва» на этот вопрос мистер В – не Хи.

Заметим, что если А – мистер Хи, то ни Б, ни В не могут быть Хи, что нам и нужно.

Предположим, что мистер А – не Хи, и рассмотрим варианты его ответов на вопрос.

*Пусть А ответил «йа».*

*Вариант 1:* мистер А – это мистер Йа.

Тогда утверждение в вопросе истинно, и карта мистера А – это карта Йа. Так как в колоде карта Йа лежит на карте Ва, то мистер Б – это мистер Ва.

*Вариант 2:* мистер А – это мистер Ва.

Раз мистер Ва ответил «йа», то утверждение «карта мистера А лежит на карте мистера Б» – ложно. Значит, карта Ва не лежит на карте мистера Б. По определению колоды карта Ва лежит на карте Хи. Значит, мистер Б – не Хи.

*Пусть А ответил «ва».*

*Вариант 1:* мистер А – это мистер Йа.

Утверждение в вопросе ложно. Карта Йа лежит в колоде на карте Ва и не лежит на карте Хи. Значит, мистер Б – это Хи, а мистер В – это мистер Ва.

*Вариант 2:* мистер А – это мистер Ва.

Утверждение истинно. Карта Ва лежит в колоде на карте Хи. Значит, мистер Б – это Хи, а мистер В – это мистер Йа.

#### Второй вопрос

Первым вопросом мы из мистеров Б и В определили того, который точно не является хитрецом. Второй вопрос нужно задать именно этому, не являющемуся хитрецом, островитянину.

В обоих случаях вопрос будет один и тот же и будет очень похож на предыдущий:

«Лежит ли твоя карта в колоде на карте мистера А?»

Как мы видели выше, ответ на этот вопрос указывает нам среди двух островитян (тех, которым не адресован текущий вопрос) одного, который точно не является мистером Хи.

Для определенности рассмотрим случай, когда вопрос задается Б. Тогда или А, или В – не Хи. Пусть В. Тогда Хи – это мистер А.

Аналогично во всех возможных случаях мы узнаем того, кто является мистером Хи.

#### Третий вопрос

Итак, предыдущими двумя вопросами мы нашли среди островитян мистера Хи. Как и в решении задачи 2, зададим любому из двух оставшихся жителей острова вопрос-«индикатор» рыцарей и лжецов «Йа – это Да?» и тем самым узнаем, кто есть кто.

Алгоритм предъявлен и задача решена!

Приведенное решение идейно близко к оригинальному решению Дж. Булоса. Однако две мысленные конструкции – новые имена людей и колода карт (отношение среди новых имен) – позволили избежать условных высказываний, а

также громоздких конструкций при построении вопросов, задаваемых островитянам, в оригинальном решении.

Напоследок небольшое заключение, которое мы адресуем читателям, желающим разобраться, откуда взялось такое решение и как можно было его придумать.

### Пояснение к выбору колоды и формулировке вопросов

#### Первый и второй вопросы

Как мы видели, цель первого вопроса, как и в решении Дж. Булоса, – найти островитянина, который не мистер Хи (т.е. или рыцарь, или лжец). Первый вопрос мы задавали мистру А.

Случай, когда мистер А – это мистер Хи, менее интересен. Какой бы вопрос мы ни задавали, ответ на него мистера А не имеет большой ценности для нас (мы не знаем, сказал он правду или ложь). Более того, получается, что первым вопросом мы не можем исключить мистера А из списка возможных кандидатов для мистера Хи.

Значит, **наша цель**: первым вопросом узнать, что или мистер Б – не Хи, или В – не Хи.

Ценность же случая, когда мистер А – это мистер Хи, как раз в том, что тогда оба мистера (и Б, и В) не являются мистером Хи!

Теперь предположим, что мистер А – это или мистер Йа, или мистер Ва. Если бы мы придумали такой вопрос, что ответ «йа» на него означал бы, что мистер Б – не мистер Хи, а ответ «ва» означал бы, что мистер В – не мистер Хи, то мы достигли бы поставленной **цели**.

Предположим, мы нашли такой вопрос, задали его и получили ответ «йа». Рассмотрим, какие варианты могут быть для мистера А.

Пусть мистер А – это мистер Йа.

Ответ «йа» на какой-либо вопрос тогда означает, что утверждение в вопросе истинно. Мы хотим, чтобы оно

означало: мистер Б – не мистер Хи, т.е. он – мистер Ва (ведь мистер Йа в нашем случае – это мистер А). Другими словами, утверждение должно означать: «Если А – это Йа, то Б – Ва».

Пусть теперь мистер А – это мистер Ва.

Значит, утверждение в вопросе ложно. Мы хотим чтобы эта ложь и в этом случае означала, что мистер Б – это не Хи. Строя отрицание, получаем, что изначальный вопрос должен звучать так: «Если А – это Ва, то Б – Хи».

Оставляем читателю самостоятельно проверить, что в случае ответа «ва», именно эти утверждения в обоих вариантах означают, что мистер Б – это Хи, а значит В – это не мистер Хи.

Итак, мы установили, что для достижения нашей цели и нахождения нужного вопроса мы должны найти некую связь (установить какое-то отношение) между Йа и Ва, а также между Ва и Хи. Причем, как мы видим, связь должна быть односторонняя.

Вот почему нам понадобилась колода карт, в которой понятие «одна карта лежит на другой» – это как раз необходимая нам связь!

Второй вопрос был выбран таким же, поскольку он, очевидно, помогает определить мистера Хи.

Связь можно было бы описать и по-другому, с помощью одностороннего знакомства (когда первый человек знает второго, но второй может не знать первого). При этом вопросы из решения станут более лаконичными, скажем «Ты знаешь мистера Б?» вместо «Лежит ли твоя карта в колоде на карте мистера Б?» С другой стороны, по условию все три островитянина знакомы друг с другом – возникает путаница с понятием «знакомство».

#### Третий вопрос

Вопросов-«индикаторов» рыцарей и лжецов много. Докажите, что подойдет, например, вопрос «Рыцарь – это мистер Йа?»

## Как Архимед взвесил параболу?

(Начало см. на с. 37)

При этом задачу сформулируем несколько другим образом: какой должна быть площадь треугольника  $AOB$  в состоянии равновесия, считая вес самой чаши и тросиков пренебрежимо малым?

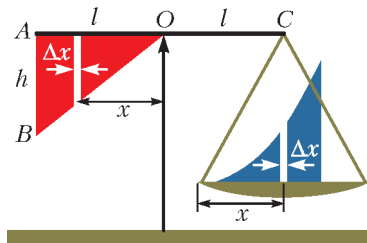


Рис.2

Решим эту задачу с помощью правила рычага, применяя его к выделенным белым цветом вертикальным фрагментам треугольника и параболы. Заметим, что параболы остается лежать на правой чаше, и поэтому плечо рычага для каждого из ее фрагментов равно  $l$ , так как сила тяжести этого фрагмента передается через силу натяжения нитей в точку  $C$  и направлена вертикально вниз. Если считать ширину фрагментов равной  $\Delta x$ , то равенство моментов сил относительно точки  $O$  слева и справа будет иметь вид

$$h \frac{x}{l} \Delta x \cdot x = ax^2 \Delta x \cdot l, \text{ откуда } h = al^2.$$

Значит, площадь треугольника  $AOB$  должна быть равна

$$S_{AOB} = \frac{al^3}{2}.$$

Известно, что центр тяжести любого треугольника находится в точке пересечения медиан, которая их делит в отношении 2:1. Поэтому плечо силы тяжести треугольника  $AOB$  относительно точки  $O$  равно  $\frac{2}{3}l$ . Напишем теперь правило рычага для всех сил, действующих в системе в состоянии равновесия. Слева действует «сила тяжести треугольника»  $S_{AOB}$  с плечом  $\frac{2}{3}l$ , справа – неизвестный «вес параболы»  $S$  с плечом  $l$ . При равновесии справедливо следующее равенство:

$$\frac{al^3}{2} \cdot \frac{2}{3}l = S \cdot l,$$

откуда находим площадь параболы:

$$S = \frac{al^3}{3}.$$

На рисунке 3 фигура  $KLM$  вписана в прямоугольник  $KLMN$ , причем площадь под параболой составляет  $1/3$  площади прямоугольника. Таким образом, применив правило рычага, Архимеду удалось определить площадь криволинейной фигуры, или, как говорят, определить квадратуру параболы – найти прямоугольник равной площади.

Все свои письма, содержащие научные работы, Архимед кончал одинаково: «Будь здоров!» К этому присоединяется и автор этой статьи.

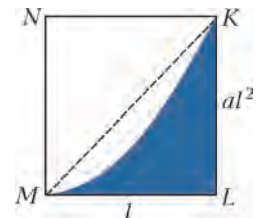


Рис.3

# Пары. Влажность

А. ЧЕРНОУЦАН

**П**АРОМ НАЗЫВАЮТ ГАЗООБРАЗНОЕ ФАЗОВОЕ СОСТОЯНИЕ некоторого вещества. Употребляя термин «пар» (а не «газ»), мы указываем на то, что при данной температуре могут происходить взаимные превращения между жидкой и газообразной фазами данного вещества (между жидкостью и ее паром). Более того, параметры пара (давление, плотность, концентрация) даются обычно в сравнении с параметрами *насыщенного пара*, находящегося в равновесии со своей жидкостью при той же температуре.

Равновесие между жидкостью и ее насыщенным паром носит *динамический* характер. Это значит, что непрерывно происходят два процесса – переход молекул из жидкости в пар, т.е. испарение, и поглощение жидкостью некоторой части подлетающих к ее поверхности молекул, т.е. конденсация. В случае насыщенного пара эти два процесса точно компенсируют друга. Если температура системы зафиксирована, то такая компенсация наступает только при определенной концентрации (при определенной плотности) пара, т.е. плотность насыщенного пара зависит лишь от его температуры. Интенсивность испарения с ростом температуры увеличивается, поэтому плотность насыщенного пара  $\rho_n(T)$  – монотонно возрастающая функция (рис.1,а). Поскольку, в

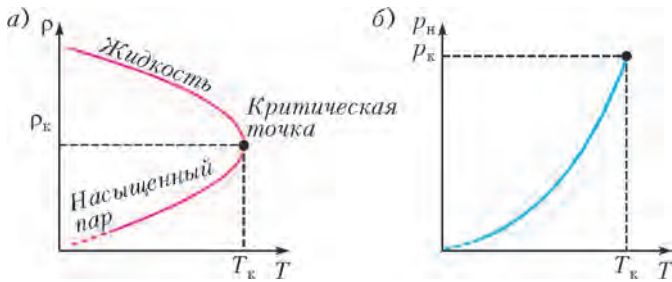


Рис. 1

свою очередь, давление пара является функцией температуры и концентрации пара (они связаны уравнением состояния), давление насыщенного пара  $p_n$  также является функцией только его температуры (не зависит от объема). Причем функция  $p_n(T)$  возрастает гораздо быстрее (рис.1,б), чем функция  $\rho_n(T)$ .

Если динамическое равновесие нарушается, то либо испарение, либо конденсация начинают превалировать, и масса жидкости будет либо уменьшаться, либо увеличиваться. Рассмотрим, например, жидкость, находящуюся в равновесии со своим паром в цилиндрическом сосуде под поршнем при фиксированной температуре (рис.2). Если сдвинуть поршень вверх, то давление и плотность пара сначала уменьшатся, скорость конденсации станет меньше, чем ско-

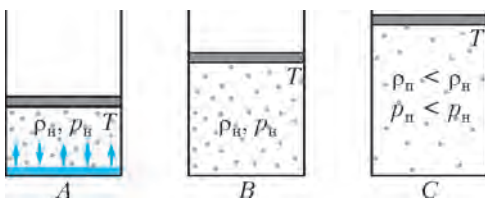


Рис. 2

рость испарения. Дополнительная жидкость будет испаряться до тех пор, пока пар снова не станет насыщенным. Если поршень продолжать медленно сдвигать вверх, то в некоторый момент вся жидкость испарится, после чего масса пара перестанет изменяться, и давление пара будет изотермически уменьшаться, как у обычного газа (рис.3, кривая A–B–C).



Рис. 3

Пар, давление которого меньше давления насыщенного пара при той же температуре, называют *ненасыщенным*.

Если ненасыщенный пар медленно изотермически сжимать, то его давление будет возрастать до тех пор, пока оно не сравняется с давлением насыщенного пара. При дальнейшем сжатии силы притяжения между молекулами пара оказываются достаточно существенными для того, чтобы молекулы объединялись в капельки жидкости. Давление больше расти не будет, масса пара будет уменьшаться, а масса жидкости будет соответственно увеличиваться (см. рис.3, кривая C–B–A).

Ненасыщенный пар можно превратить в насыщенный не только изотермическим сжатием, но и изохорным охлаждением. Если в начальном состоянии  $p_n < p_n$  и  $\rho_n < \rho_n$ , то при изохорном охлаждении  $\rho_n$  остается постоянной, а  $p_n$  уменьшается до тех пор, пока не сравняется с  $p_n$  (рис.4,а). Температуру, при которой это происходит, называют *точкой*

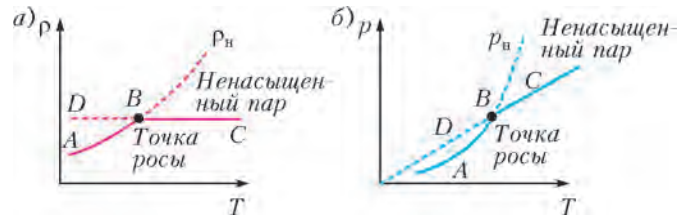


Рис. 4

росы для данного значения  $\rho_n$ . При дальнейшем охлаждении пар станет насыщенным, его плотность уменьшится, на стенках появятся капельки жидкости. На рисунке 4,б изображен тот же процесс на графике зависимости  $p(T)$ : при изохорном охлаждении ненасыщенного пара его давление  $p$  уменьшается по газовым законам, но давление насыщенного пара  $p_n(T)$  падает гораздо быстрее, и в точке росы они сравниваются.

Степень ненасыщенности пара задается *относительной влажностью*, равной отношению давления пара к давлению насыщенного пара при той же температуре:

$$\varphi = \frac{p_n}{p_n} \quad (1)$$

Опыт показывает, что при температурах, заметно меньших критической температуры (для воды, например,  $T_k = 374,15^\circ\text{C}$ ), как для насыщенного, так и для ненасыщенного пара с хорошей точностью выполняются уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p_n = \frac{\rho_n}{M} RT, \quad p_n = \frac{\rho_n}{M} RT.$$

(Отметим, что это утверждение скорее не очевидное, а удивительное. В модели идеального газа мы пренебрегаем взаимодействием между молекулами, а в насыщенном паре именно это взаимодействие приводит к образованию капелек жидкости.) Благодаря этим уравнениям относительная влажность может быть определена как отношение плотности ненасыщенного пара к плотности насыщенного пара (при той же температуре):

$$\varphi = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{н}}} . \quad (2)$$

При этом *абсолютной влажностью* называют просто плотность пара, а давление пара иногда называют *упругостью пара*. Отметим также, что при медленном охлаждении пар может на некоторое время оказаться в метастабильном состоянии, в котором  $\varphi > 1$  (линии *BD* на рисунках 3, 4); это связано с трудностью образования совсем маленьких капелек жидкости, обладающих большой поверхностной энергией.

О зависимости давления насыщенного пара от температуры можно узнать, наблюдая за *кипением* жидкости. Если интенсивно нагревать жидкость при постоянном внешнем давлении, то в объеме жидкости образуются маленькие пузырьки, заполненные насыщенным паром. При температуре, при которой давление насыщенного пара сравнивается с внешним давлением, пузырьки перестают схлопываться, они всплывают, увеличиваясь в размерах, и выбрасывают пар наружу. Например, хорошо известно, что при нормальном атмосферном давлении вода кипит при 100 °С, следовательно, при  $T = 373$  К насыщенный водяной пар имеет давление  $p_{\text{н}} = 1$  атм = 100 кПа. Как уже говорилось,  $p_{\text{н}}$  сильно зависит от температуры: при 647,3 К  $p_{\text{н}} = 221$  атм (критическая точка), при 390 К  $p_{\text{н}} = 180$  кПа (скороварка), при 340 К  $p_{\text{н}} = 30$  кПа (на Эльбрусе), при 300 К  $p_{\text{н}} = 3,6$  кПа, при 288 К  $p_{\text{н}} = 1,7$  кПа.

Скажем несколько слов о термодинамике парообразования. Для того чтобы массу  $\Delta m$  жидкости, находящейся в равновесии с насыщенным паром (см. рис.2), изотермически и равновесно превратить в пар, ей надо сообщить количество теплоты

$$Q = \lambda \Delta m ,$$

где  $\lambda$  – удельная теплота парообразования. При этом пар совершит работу

$$A = p_{\text{н}} \Delta V = \frac{\Delta m RT}{M} ,$$

а внутренняя энергия системы увеличится на

$$\Delta U = Q - A = \left( \lambda - \frac{RT}{M} \right) \Delta m = \Delta u \Delta m .$$

Видно, что удельное изменение внутренней энергии  $\Delta u$  при парообразовании меньше, чем удельная теплота парообразования. Отличие для воды при 100 °С невелико – примерно 7,5%, но и пренебрежимо малым его не назовешь. Можно привести примеры, где надо использовать формулу для  $\Delta U$ , а не для  $Q$ . Если, например, в пустой сосуд фиксированного объема ввели немного воды массой  $m$ , то для ее изотермического испарения надо сообщить ей количество теплоты  $\Delta u \cdot m$ , а не  $\lambda m$  (работа пара равна нулю). Так же надо поступать, записывая уравнение теплового баланса, если теплообмен между конденсирующимся паром и водой происходит в закрытом сосуде постоянного объема.

Надо сказать, что обычно в школьных задачах отличаем между  $\lambda$  и  $\Delta u$  пренебрегают.

Перейдем теперь к решению конкретных задач. В первых задачах для подсчета массы пара используется понятие относительной влажности.

**Задача 1.** В одном сосуде объемом  $V_1 = 10$  л находится воздух с относительной влажностью  $\varphi_1 = 40\%$  (или  $\varphi_1 = 0,4$ ), а в другом сосуде объемом  $V_2 = 30$  л – воздух при той же температуре, но с относительной влажностью  $\varphi_2 = 60\%$  (или  $\varphi_2 = 0,6$ ). Сосуды соединены тонкой трубкой с краном. Какая относительная влажность установится после открывания крана?

**Решение.** В данном случае очевидно, что в конечном состоянии пар будет ненасыщенным. Запишем условие сохранения массы пара, используя определение относительной влажности в форме (2):

$$\varphi_1 \rho_{\text{н}} V_1 + \varphi_2 \rho_{\text{н}} V_2 = \varphi' \rho_{\text{н}} (V_1 + V_2) ,$$

откуда находим

$$\varphi' = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0,55 , \text{ или } \varphi' = 55\% .$$

**Задача 2.** Какую массу воды надо дополнительно испарить в комнате объемом  $V = 49,8$  м<sup>3</sup>, чтобы при температуре  $t_1 = 27$  °С повысить относительную влажность от  $\varphi_1 = 25\%$  до  $\varphi_2 = 50\%$ ? Давление насыщенных паров воды при температуре 27 °С равно  $p_{\text{н}} = 3,6$  кПа.

**Решение.** Массу водяных паров в комнате при данной влажности найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона, выразив давление пара через относительную влажность:

$$m = \frac{p_{\text{п}} VM}{RT} = \frac{(\varphi p_{\text{н}}) VM}{RT} . \quad (3)$$

Для увеличения относительной влажности от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  при постоянной температуре надо увеличить массу паров в комнате на

$$\Delta m = m_2 - m_1 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) p_{\text{н}} VM}{RT} = 324 \text{ г} .$$

Отметим, что в этой и в следующей задачах речь идет только о парциальном давлении пара. Есть ли в сосуде еще и воздух, для таких задач не существенно.

**Задача 3.** В закрытой теплице объемом  $V = 33,2$  м<sup>3</sup> относительная влажность воздуха в дневное время при температуре  $t_1 = 27$  °С была равна  $\varphi_1 = 75\%$ . Какая масса росы выпадет в теплице ночью, когда температура понижается до  $t_2 = 15$  °С? Давление насыщенных паров воды при температуре 27 °С равно  $p_{\text{н}1} = 3,6$  кПа, при температуре 15 °С –  $p_{\text{н}2} = 1,7$  кПа.

**Решение.** В соответствии с условием задачи разумно предположить, что поскольку роса уже выпадает, то температура опустилась ниже точки росы, т.е. пар уже находится в насыщенном состоянии ( $\varphi_2 = 1$ ). Массу росы можно рассчитать как разницу между начальной массой пара в объеме теплицы и конечной массой насыщенного пара:

$$m_{\text{росы}} = m_1 - m_2 = \frac{\varphi_1 p_{\text{н}1} VM}{RT_1} - \frac{p_{\text{н}2} VM}{RT_2} = 223 \text{ г} .$$

Если бы предположение о выпадении росы было неверным, то ответ просигнализировал бы нам об этом: масса росы оказалась бы отрицательной.

**Задача 4** (ЕГЭ). Относительная влажность воздуха в закрытом сосуде равна  $\varphi_1 = 40\%$ . Какой будет относительная влажность после изотермического уменьшения объема в 3 раза?

**Решение.** Среди предлагаемых вариантов есть и ответ 120%, который выбирают многие школьники. На самом деле уже после уменьшения объема в 2,5 раза пар станет насыщенным, и при дальнейшем сжатии будет происходить конденсация воды, а относительная влажность останется равной 100%. Больше 100% относительная влажность быть не может.



В следующих трех задачах речь идет о давлении пара и предполагается, что воздуха в сосуде нет.

**Задача 5 (ЕГЭ).** В цилиндре под поршнем при комнатной температуре  $t_0$  долгое время находятся только вода и ее пар. Масса жидкости в два раза больше массы пара. Первоначальное состояние системы показано точкой 1 на  $pV$ -диаграмме (рис.5,а). Медленно перемещая поршень,

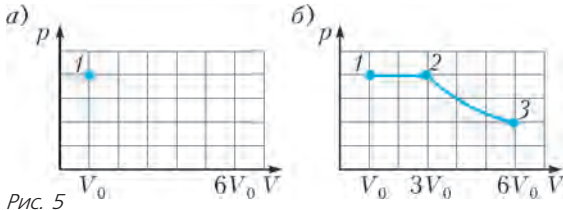


Рис. 5

объем  $V$  под поршнем изотермически увеличивают от  $V_0$  до  $6V_0$ . Постройте график зависимости давления  $p$  в цилиндре от объема  $V$  на отрезке от  $V_0$  до  $6V_0$ . Укажите, какими закономерностями вы при этом воспользовались.

**Решение.** Пока вся вода не испарится, давление в сосуде будет оставаться равным давлению насыщенного пара при данной температуре, а плотность пара будет неизменна и равна плотности насыщенного пара. Если пренебречь начальным объемом воды, то вся вода испарится при увеличении объема от  $V_0$  до  $3V_0$  (рис.5,б; горизонтальный участок 1–2). При дальнейшем увеличении объема от  $3V_0$  до  $6V_0$  масса пара меняться не будет, давление уменьшится в 2 раза в изотермическом процессе (участок 2–3 – гипербола).

**Задача 6.** Сосуд содержит жидкость и ее насыщенный пар. При изотермическом увеличении объема в 4 раза давление уменьшается в 3 раза. Найдите отношение массы пара к массе жидкости в начальном состоянии. Объемом жидкости пренебречь.

**Решение.** Эта задача в каком-то смысле обратная предыдущей. Давление начнет уменьшаться только после того, как вся жидкость испарится. С этого момента пар подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона, т.е. уменьшение давления в 3 раза происходит при увеличении в 3 раза объема сосуда. Следовательно, на первом этапе, пока пар был насыщенным, объем сосуда увеличился в  $4/3$  раза. Так как плотность насыщенного пара в изотермическом процессе не меняется, то масса пара за счет испарения увеличилась в  $4/3$  раза. Таким образом, начальная масса пара в 3 раза больше начальной массы жидкости.

**Задача 7.** Жидкость и ее насыщенный пар находятся в цилиндре под поршнем при некоторой температуре, причем масса пара вдвое больше массы жидкости. Температуру системы изобарно поднимают до  $t_2 = 91^\circ\text{C}$ , объем при этом увеличивается на 56%. На сколько градусов нагрели содержимое цилиндра? Объем жидкости считать малым по сравнению с объемом цилиндра.

**Решение.** Поскольку давление насыщенного пара является функцией температуры, то на первом этапе, пока вся жидкость не испарилась, для поддержания постоянного давления надо поддерживать постоянную температуру. В этом процессе объем может увеличиться в 1,5 раза (вначале масса жидкости вдвое меньше массы пара). Дальнейшее изобарное увеличение объема в  $1,56/1,5 = 1,04$  раза происходит с паром постоянной массы, подчиняющимся уравнению Менделеева–Клапейрона, т.е. с увеличением температуры также в 1,04 раза. Начальная температура равна

$$T_1 = \frac{T_2}{1,04} = \frac{364 \text{ К}}{1,04} \approx 350 \text{ К},$$

т.е. сосуд нагрели на 14 К.

В следующих задачах речь пойдет о влажном воздухе, т.е. о смеси сухого воздуха с парами воды. Давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений сухого воздуха и водяного пара. Разница между ними в том, что масса сухого воздуха в сосуде неизменна, а масса водяного пара может изменяться за счет конденсации или испарения.

**Задача 8.** Определите отношение плотностей влажного, с относительной влажностью 90%, и сухого воздуха при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$  и давлении  $p_0 = 1$  атм. Давление насыщенных паров воды при этой температуре равно  $p_n = 3,6$  кПа.

**Решение.** Плотность сухого воздуха равна

$$\rho_B = \frac{p_0 M_B}{RT}.$$

Парциальное давление водяного пара равно

$$p_n = \Phi p_n,$$

а парциальное давление воздуха составляет

$$p_B = p_0 - p_n = p_0 - \Phi p_n.$$

Плотность влажного воздуха равна

$$\rho'_B = \frac{(p_0 - p_n) M_B}{RT} + \frac{p_n M_n}{RT} = \frac{p_0 M_B}{RT} - \frac{p_n (M_B - M_n)}{RT}.$$

Видно, что плотность влажного воздуха меньше плотности сухого воздуха. Их отношение равно

$$\frac{\rho'_B}{\rho_B} = 1 - \frac{\Phi p_n}{p_0} \left( 1 - \frac{M_n}{M_B} \right) = 0,988.$$

**Задача 9.** В закрытом сосуде при температуре  $100^\circ\text{C}$  находится влажный воздух с относительной влажностью  $\Phi = 40\%$  под давлением  $p_1 = 2$  атм. Объем сосуда изотермически уменьшили в 3 раза. Чему будет равно конечное давление? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

**Решение.** Давление насыщенных водяных паров при  $100^\circ\text{C}$  равно  $p_n = p_0 = 1$  атм = 100 кПа. Следовательно, парциальное давление водяного пара в начальном состоянии равно

$$p_{n1} = \Phi p_0 = 0,4 p_0,$$

а парциальное давление сухого воздуха составляет

$$p_{B1} = p_1 - p_{n1} = 2p_0 - 0,4p_0 = 1,6p_0.$$

Если бы конденсации не было, то парциальное давление пара увеличилось бы в 3 раза и стало бы больше давления насыщенного пара, что невозможно. Значит, в какой-то момент конденсация началась, и парциальное давление пара стало равно давлению насыщенного пара:

$$p_{n2} = p_n = p_0.$$

Давление сухого воздуха увеличилось в 3 раза и стало равно

$$p_{B2} = 3p_{B1} = 4,8p_0.$$

Конечное давление в сосуде будет равно

$$p_2 = p_{B2} + p_{n2} = 5,8p_0 = 580 \text{ кПа}.$$

**Задача 10.** В закрытом сосуде при температуре  $100^\circ\text{C}$  находится влажный воздух под давлением  $p_1 = 2$  атм. После того как объем сосуда изотермически уменьшили в 5 раз, давление увеличилось в 4 раза. Чему была вначале равна относительная влажность (в процентах)? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

**Решение.** Если бы в процессе сжатия конденсация воды не началась, то масса газа не менялась бы и давление увеличилось бы в 5 раз. Поскольку давление увеличилось в 4 раза, то, значит, началась конденсация, и с этого момента пар

находится в состоянии насыщения:

$$p_{п2} = p_n = p_0 .$$

Следовательно, конечное парциальное давление сухого воздуха равно

$$p_{в2} = p_2 - p_{п2} = 4p_1 - p_{п2} = 8p_0 - p_0 = 7p_0 .$$

Поскольку масса сухого воздуха не меняется, его начальное давление в 5 раз меньше:

$$p_{в1} = \frac{p_{в2}}{5} = 1,4p_0 .$$

Следовательно, парциальное давление водяного пара в начальном состоянии равно

$$p_{п1} = p_1 - p_{в1} = 2p_0 - 1,4p_0 = 0,6p_0 ,$$

а его относительная влажность составляет

$$\phi_1 = \frac{p_{п1}}{p_n} \cdot 100\% = \frac{0,6p_0}{p_0} \cdot 100\% = 60\% .$$

**Задача 11.** В закрытом сосуде объемом  $V = 83$  л находится влажный воздух при температуре  $t = 87^\circ\text{C}$ . Вначале давление в сосуде  $p_1 = 60$  кПа, влажность  $\phi_1 = 40\%$ . Каким стало давление после того, как в сосуд ввели  $\Delta m = 20$  г воды? Давление насыщенного пара при  $87^\circ\text{C}$  составляет  $p_n = 60$  кПа. Объемом воды пренебречь.

**Решение.** Надо выяснить, испарится ли вся добавленная вода и пар при этом останется ненасыщенным или испарится только часть воды и пар станет насыщенным. Начальное парциальное давление пара равно  $p_{п1} = \phi_1 p_n = 24$  кПа, парциальное давление сухого воздуха равно  $p_v = p_n - p_{п1} = 36$  кПа. Вычислим, какое давление создавал бы дополнительный пар, если бы вся вода испарилась:

$$\Delta p_n = \frac{\Delta m RT}{MV} = 40 \text{ кПа} .$$

В этом случае парциальное давление пара было бы равно  $24 \text{ кПа} + 40 \text{ кПа} = 64 \text{ кПа}$ , что больше давления насыщенного пара. Значит, в сосуде будет вода и насыщенный пар, а давление в сосуде станет

$$p_2 = p_v + p_n = 96 \text{ кПа} .$$

**Задача 12.** В сосуд, заполненный воздухом при давлении  $p_0 = 1$  атм при температуре  $t_0 = -23^\circ\text{C}$ , поместили маленькую льдинку, после чего герметически его закрыли. Затем сосуд нагрели до температуры  $t_1 = 227^\circ\text{C}$ , и оказалось, что давление в нем повысилось до  $p_1 = 3$  атм. Какова будет относительная влажность воздуха в сосуде после его охлаждения до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ?

**Решение.** Возникает два вопроса: будет ли пар насыщенным после нагревания и если нет, то станет ли он насыщенным после охлаждения? Начальное давление пара ничтожно мало, поэтому все начальное давление  $p_0$  создается только сухим воздухом. После увеличения абсолютной температуры в 2 раза давление сухого воздуха увеличится в 2 раза и станет  $p_{в1} = 2$  атм. Значит, парциальное давление пара составит  $p_{п1} = p_1 - p_{в1} = 1$  атм. Давление насыщенного пара равно 1 атм при  $100^\circ\text{C}$ , при  $227^\circ\text{C}$  оно гораздо больше, значит, после нагревания в сосуде воды не будет. Пар останется ненасыщенным и после охлаждения сосуда до  $100^\circ\text{C}$ , поскольку его давление станет меньше  $p_n = 1$  атм. Конечное давление пара найдем из условия изохорного охлаждения:

$$p_{п2} = p_{п1} \frac{T_2}{T_1} = 1 \text{ атм} \cdot \frac{373 \text{ К}}{500 \text{ К}} = 0,746 \text{ атм} .$$

Соответственно, относительная влажность будет 74,6%.

**Задача 13.** В сосуде объемом  $V_1 = 20$  л находятся вода, водяной пар и воздух при давлении  $p_1 = 3$  атм. При изотермическом расширении до  $V_2 = 40$  л в сосуде сохраняется немного воды, а давление уменьшается до  $p_2 = 2$  атм. Найдите массу воды, испарившейся в процессе расширения. Объемом жидкости пренебречь.

**Решение.** Поскольку пар остается насыщенным, его парциальное давление не меняется и сохраняется равным  $p_n$ , а давление сухого воздуха уменьшается в 2 раза. Получаем уравнения

$$p_1 = p_n + p_{в1}, \quad p_2 = p_n + 0,5p_{в1},$$

откуда находим

$$p_n = 1 \text{ атм} .$$

Следовательно, сосуд находится при температуре  $T = 373$  К. При этом масса испарившейся воды равна

$$\Delta m = \frac{p_n (V_2 - V_1) M}{RT} = 11,6 \text{ г} .$$

В следующих двух задачах кроме законов, описывающих свойства водяных паров, используются уравнения гидростатики.

**Задача 14.** Длинную пробирку заполняют водой и опускают в широкий сосуд с водой открытым концом вниз (рис. 6, а). Длина выступающей над водой части пробирки равна  $0,5$  м, у верхнего конца остался маленький пузырек воздуха. Какой будет разница между уровнями воды в пробирке и в сосуде, если пробирку нагреть до  $100^\circ\text{C}$ ?

**Решение.** При нагревании до  $100^\circ\text{C}$  в пузырьке, заполненном водяным паром, давление поднимется до 1 атм, и граница между водяным паром и водой опустится до уровня воды в сосуде (рис. 6, б).

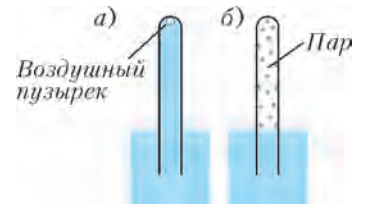


Рис. 6

**Задача 15.** В длинной U-образной трубке находится вода при температуре  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Левое колено трубки запаяно, правое открыто, расстояние от закрытого конца до уровня воды  $h = 0,1$  м (рис. 7, а). Начальное давление воздуха в левом колене  $p_0 = 1$  атм. На сколько опустится уровень воды в левом колене, если его нагреть до температуры  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ?

**Решение.** Предположим, что уровень воды в левом колене опустится на  $x < h$  (вода не выливается из правого колена). Пренебрегая начальным давлением паров, получим, что конечное давление воздуха в левом колене будет равно гидростатическому давлению воды в правом колене (рис. 7, б):

$$p_{в2} + p_n = p_0 + \rho g \cdot 2x ,$$

а поскольку при  $100^\circ\text{C}$   $p_n = p_0$ , то  $p_{в2} = 2\rho g x$ . Подставляя

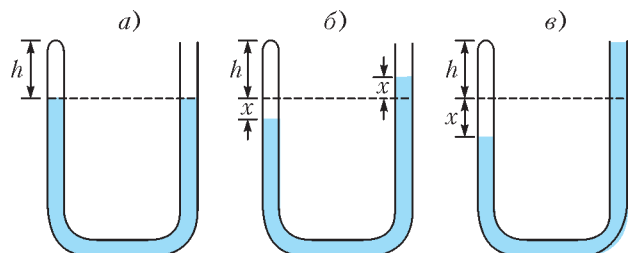


Рис. 7

в уравнение газового состояния для сухого воздуха

$$\frac{p_0 h S}{T_1} = \frac{p_{в2} (h + x) S}{T_2},$$

приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + hx - \frac{p_0 h T_2}{2\rho g T_1} = 0,$$

из которого находим  $x = 0,78$  м. Предположение о том, что вода не вытекает из правого колена, оказалось неверным. В таком случае уравнение гидростатического равновесия приобретает вид (рис.7,в):

$$p_{в2} + p_n = p_0 + \rho g (h + x),$$

и уравнение газового состояния приводится к виду

$$\frac{p_0 h}{T_1} = \frac{\rho g (h + x)^2}{T_2}.$$

Отсюда получаем

$$x = \sqrt{\frac{p_0 h T_2}{\rho g T_1}} - h = 1,07 \text{ м}.$$

Последняя задача хорошо иллюстрирует процесс кипения.

**Задача 16.** В стакан налиты две несмешивающиеся жидкости: четыреххлористый углерод  $CCl_4$  и вода. При нормальном атмосферном давлении  $CCl_4$  кипит при  $76,7^\circ C$ , вода – при  $100^\circ C$ . При равномерном нагревании стакана в водяной бане кипение на границе раздела жидкостей начинается при температуре  $65,5^\circ C$ . Определите, какая из жидкостей быстрее выкипает при таком «пограничном» кипении и во сколько раз. Давление насыщенных паров воды при  $65,5^\circ C$  составляет 192 мм рт. ст.

**Решение.** Пузырек на границе двух жидкостей заполнен смесью насыщенных паров воды и  $CCl_4$  при данной температуре. Пограничное кипение наступает тогда, когда давление в пузырьке сравнивается с атмосферным, т.е. становится равным в Москве, например, 750 мм рт.ст. Следовательно, давление  $CCl_4$  при этой температуре будет равно

$$p_{н2} = p_0 - p_{н1} = (750 - 192) \text{ мм рт.ст.} = 558 \text{ мм рт.ст.}$$

Массу каждого пара в пузырьке выразим из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$m_1 = \frac{p_{н1} V M_1}{RT}, \quad m_2 = \frac{p_{н2} V M_2}{RT},$$

откуда найдем их отношение:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{p_{н2} M_2}{p_{н1} M_1} = \frac{558 \text{ мм рт.ст.} \cdot 152 \text{ г/моль}}{192 \text{ мм рт.ст.} \cdot 18 \text{ г/моль}} \approx 25.$$

Значит, четыреххлористый углерод выкипает в 25 раз быстрее воды.

**Упражнения**

1. Для повышения относительной влажности на 20% ( $\phi_2 - \phi_1 = 0,2$ ) при температуре  $20^\circ C$  в комнате объемом  $50 \text{ м}^3$  понадобилось испарить 180 г воды. Найдите плотность (в  $\text{г/м}^3$ ) насыщенных паров воды при температуре  $20^\circ C$ .

2. В закрытой теплице объемом  $33,2 \text{ м}^3$  относительная влажность воздуха в ночное время при температуре  $15^\circ C$  была равна 92%. Какую массу (в г) воды надо будет дополнительно испарить в теплице днем, когда температура повысится до  $27^\circ C$ , чтобы относительная влажность не упала ниже 75%? Давление насыщенных паров воды при температуре  $15^\circ C$  равно 1,7 кПа, при температуре  $27^\circ C$  – 3,6 кПа.

3. В сосуде при температуре  $100^\circ C$  находится влажный воздух с относительной влажностью 40% под давлением 1 атм. Объем сосуда изотермически уменьшают в 5 раз. Чему будет равно конечное давление (в атм)? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

4. В сосуде при температуре  $100^\circ C$  находится влажный воздух под давлением 1 атм. После изотермического уменьшения объема в 4 раза давление увеличилось в 3,8 раза. Чему была равна относительная влажность (в процентах) в начальном состоянии? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

5. В закрытом сосуде при температуре  $100^\circ C$  находится влажный воздух с относительной влажностью 40% под давлением 1 атм. Объем сосуда изотермически уменьшили в 5 раз. Во сколько раз надо вместо этого увеличить абсолютную температуру, чтобы получить такое же конечное давление? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

6. В закрытом сосуде объемом 83 л находится влажный воздух при температуре  $87^\circ C$ . Вначале давление в сосуде было 60 кПа, влажность была 40%. Каким стало давление (в кПа) после того, как в сосуд ввели 16 г воды? Давление насыщенного пара при  $87^\circ C$  составляет 60 кПа. Объемом воды пренебречь.

7. В закрытом сосуде объемом 83 л находится влажный воздух с относительной влажностью 60% при температуре  $87^\circ C$ . Какая масса воды (в г) сконденсируется при изотермическом уменьшении объема сосуда в 2 раза? Давление насыщенного пара при  $87^\circ C$  составляет 60 кПа. Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

ИНФОРМАЦИЯ

**ЗАОЧНАЯ ШКОЛА СУНЦ НГУ**

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) физико-математического и химико-биологического профиля уже более 45 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗШ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам Заочной школы СУНЦ НГУ в форме факультативных занятий с группой учащихся.

Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в новосибирском

Академгородке с 1 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, независимо от возраста. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учеником ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой или заказной бандеролью.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде и подробную информацию можно найти на сайте заочной школы <http://zfmsh.nsu.ru>

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-40-66  
E-mail: distant@sesc.nsu.ru или zfmsh@yandex.ru

### Первые задания на 2014/15 учебный год

Математическое отделение

Математика

9 класс

1. Том Сойер может покрасить свой забор за 2 дня, его приятель Джонни Миллер – за 3 дня, а приятель Билли Фишер – за 6 дней. За сколько дней они вместе могут покрасить этот забор?

2. Точка  $E$  – середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ , а точки  $M, N$  делят сторону  $BC$  на три равные части,  $BM = MN = NC$ . Найдите площадь треугольника  $EMN$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна  $S$ .

3. Решите уравнение

$$(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5.$$

4. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  принадлежит стороне  $AC$ , причем  $AD : AC = n$ ,  $0 < n < 1$ , а точка  $M$  принадлежит стороне  $BC$ , причем  $BM : MC = 2 : 1$ . Найдите, в каком отношении  $AM$  делит  $BD$ .

5. В пачке из  $n$  банкнот,  $50 \leq n \leq 150$ , содержится 36% фальшивых. После того как из пачки вытащили 6 наиболее мелких по достоинству купюр, фальшивые стали составлять ровно  $(1/3)$ -ю часть оставшихся в пачке. Сколько банкнот было в пачке?

6. В квадрате со стороной 1 м находятся 20 точек. Найдутся ли 3 из них, которые можно накрыть квадратом со стороной  $1/3$  м?

10 класс

1. В международном шахматном турнире в городе Нью-Васюки участвовали гроссмейстеры Остап, Ипполит и Александр. Если бы Остап был более удачлив и выиграл бы в 2 раза больше партий, чем сумел выиграть, то вместе с победами Ипполита получилось бы 5 побед. А если бы Александр сыграл лучше и выиграл бы в 2 раза больше партий, чем сумел выиграть, то вместе с победами Ипполита получилось бы 7 побед.

1) Какое общее число побед одержали Остап, Ипполит и Александр?

2) Сколько побед одержал каждый гроссмейстер, если каждый выиграл не менее одной партии, а лучший результат показал Александр?

2. Точки  $M, N$  и  $P$  лежат на сторонах  $AB, BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , причем  $AM : AB = BN : BC = CP : CA = 1 : 3$ . Прямые  $CM, AN, BP$ , пересекаясь, ограничивают треугольник, площадь которого равна  $S$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

3. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров – за 60 дней. Сколько коров поели бы траву за 96 дней? (Известно, что коровы поедают траву равномерно.)

4. Найдите площадь треугольника, вписанного в окружность, если концы его стороны, равной 20 см, отстают от касательной, проведенной через противоположную вершину, на 25 см и 16 см.

5. Докажите, что если ни одно из 5 натуральных чисел  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  не делится на 5, то делится на 5 сумма нескольких рядом стоящих чисел.

6. Решите неравенство

$$(x^2 - 4)(x + 1)(x^2 + x + 1) > 0.$$

11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y^2 - x = 5. \end{cases}$$

2. Сторона правильного треугольника  $ABC$  равна  $a$ ,  $AD$  – его высота. Найдите радиус окружности, которая касается стороны  $AC$ , высоты  $AD$  и описанной около треугольника  $ABC$  окружности.

3. В первой коробке находилось некоторое количество красных шаров, а во второй – синих, причем число красных шаров составляло  $15/19$  от числа синих шаров. Когда из коробок убрали  $3/7$  красных шаров и  $2/5$  синих, то в первой коробке осталось менее 1000 шаров, а во второй – более 1000 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

4. При каких значениях параметра  $a$  функция

$$f(x) = \frac{10}{(a-2)x^2 + 2ax + (3a-1)}$$

определена при  $x \in (-\infty; +\infty)$ ?

5. Длина каждого ребра тетраэдра  $ABCD$  равна  $a$ . На ребрах  $DA, DC, BC$  расположены точки  $M, N, P$  так, что  $DM = CN = a/3, CP = a/5$ . Постройте сечение тетраэдра плоскостью  $MNP$  и найдите длину отрезка  $BQ$ , где  $Q = MNP \cap AB$ .

6. Докажите, что из 7 любых натуральных чисел можно выбрать 2 так, чтобы их сумма или разность оканчивалась на 0.

Физическое отделение

Физика

7 класс

1. Выполните первую часть Задания 1 из учебника А.В.Перышкина для 7 класса:

Измерьте линейкой с миллиметровыми делениями длину и ширину вашего учебника. Запишите результаты с учетом погрешности измерений.

2. По результатам предыдущих измерений определите площадь обложки учебника. Приведите ответ с учетом погрешности измерений.

3. Измерьте с помощью линейки с миллиметровыми делениями диаметр тонкой (менее миллиметра) мягкой проволоки.

4. Придумайте способ, с помощью которого можно определить объем небольшого тяжелого тела неправильной формы, например камня. Определите объем конкретного тела с числовыми результатами.

5. Пассажир, опоздавший на движущийся со скоростью  $v$  поезд, увидел его последний вагон на расстоянии  $L$ . С какой скоростью  $u$  он должен бежать, чтобы достичь поезда за время  $t$ ?

8 класс

1. На дне сосуда с водой лежит медный шар массой  $m = 1$  кг. Найдите силу, с которой шар давит на дно. Плотность меди  $\rho = 8,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

2. Средняя скорость автомобиля на всем пути  $v = 60$  км/ч. Первую половину пути он ехал со скоростью  $v_1 = 50$  км/ч. С какой средней скоростью  $v_2$  автомобиль проехал вторую половину пути?

3. Два поезда длиной  $L = 500$  м каждый движутся по параллельным путям в одном направлении. Скорость первого  $v_1 = 70$  км/ч, скорость второго  $v_2 = 90$  км/ч. В некото-

рый момент времени обе «головы» поездов равняются. Сколько времени понадобится второму поезду, чтобы полностью обогнать первый?

4. Расстояние между двумя пристанями на реке  $s = 144$  км. Сколько времени потребуется катеру для совершения рейса между пристанями туда и обратно, если скорость катера в стоячей воде  $v = 18$  км/ч, а скорость течения воды  $u = 3$  м/с?

5. В шахте на глубине  $H = 100$  м каждую минуту прибывает объем  $V = 4,5$  м<sup>3</sup> воды. Какой мощности  $N$  насос требуется для откачки этой воды на поверхность?

9 класс

1. После привала на берегу притока реки одна команда вышла к следующему пункту пешком по прямому маршруту, а другая отправилась туда по реке на плоту. В конечный пункт обе команды прибыли одновременно. Определите среднюю скорость передвижения пешей команды, если команда на плоту прошла участок пути по притоку за время  $t_1$ , а по реке – за время  $t_2$ . Скорость течения притока  $v_1$ , реки  $v_2$ , причем приток перпендикулярен реке.

2. Баржа при перемещении из моря в реку увеличила свое погружение в воду на  $\Delta h = 3$  см. Определите плотность морской воды. Масса баржи  $m = 1000$  т, площадь ее палубы  $S = 1000$  м<sup>2</sup>, борта баржи вертикальные. Плотность пресной воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

3. Имеются две колбы: одна полностью заполнена водой, вторая – наполовину. После того как половину воды из первой колбы перелили во вторую, перемешали содержимое второй колбы и затем половину второй колбы обратно перелили в первую, температура в первой колбе повысилась на 10 °С. На сколько первоначально вода во второй колбе была теплее, чем в первой?

4. Лодку за веревку тянут к берегу. Один человек на берегу тянет конец веревки со скоростью  $v$ , второй человек на лодке перебирает веревку, помогая первому. Лодка движется со скоростью  $u$ . Человек на берегу затратил на перемещение лодки энергию  $E$ . Какую энергию затратил человек в лодке? Непроизводительные затраты энергии отсутствуют.

5. Каждая из двух пластин длиной  $L$  имеет сопротивление  $R$ . Каким будет сопротивление между концами пластин  $A$  и  $B$ , если пластины соединить, как показано на рисунке 1?

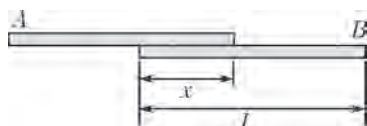


Рис. 1

10 класс

1. Буксир тянет плот из бревен вниз по течению, а затем поднимается обратно к месту лесозаготовки. Имеется возможность сплавать лес по протоке со скоростью течения  $u_1$  и по протоке со скоростью течения  $u_2$  ( $u_2 > u_1$ ). На сколько плот замедляет движение буксира, если оба маршрута требуют одинаковое время?

2. Ракета массой  $m$  стартует с обрывистого берега реки и падает в воду на расстоянии  $L$  от берега. На протяжении всего полета двигатель ракеты создает горизонтальную силу тяги  $F$ . Определите скорость ракеты при падении в воду. Изменением ее массы можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

3. Тонкостенная колба, наполненная водой, весит  $P_1$ , такая же колба, наполненная песком, весит  $P_2$ , а если

сначала эту колбу наполнить песком и потом доверху налить в нее воду, то вес колбы будет  $P_3$ . Во сколько раз плотность песчинок больше плотности воды?

4. Клин массой  $M$  лежит на гладком горизонтальном столе (рис.2). На наклоненной под углом  $\alpha$  поверхности клина лежит брусок массой  $m$ . При каком коэффициенте трения между бруском и клином клин будет скользить в сторону действия приложенной к бруску горизонтальной силы  $F$ ? Какую силу нужно приложить, чтобы клин не сдвинулся с места? Трения между клином и столом нет.

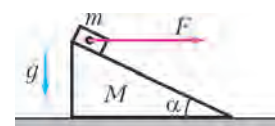


Рис. 2

5. Три шарика одинакового радиуса  $r$  соединены нитями длиной  $L$  и плавают в жидкости плотностью  $\rho$  (рис.3). Крайние шарики невесомые и погружены в жидкость наполовину. Определите силу натяжения каждой нити.

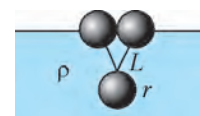


Рис. 3

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.

2. Решите задачу 2 для 10 класса.

3. Бусинка массой  $m$  надета на спицу и недеформированной пружиной длиной  $L$  присоединена к шарниру (рис.4). Спица наклонена под углом  $\alpha$  к вертикали и перпендикулярна пружине. Какой жесткостью должна обладать пружина, чтобы бусинка, когда ее отпустят, не соскочила со спицы, если расстояние от начального положения бусинки до конца спицы  $L_1$ ?

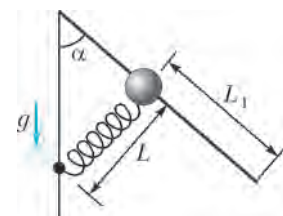


Рис. 4

4. Какую минимальную массу должен иметь водолазный колокол, чтобы его можно было погрузить в воду (рис. 5)? Колокол имеет форму закрытого сверху цилиндра радиусом  $r = 2$  м и высотой  $h = 2$  м. Объемом стенок можно пренебречь.

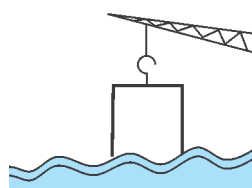


Рис. 5



Рис. 6

5. Три надутого гелием шарика удерживаются нитью, привязанной к среднему шарика (рис. 6), и образуют правильный треугольник. На шариках имеются одинаковые заряды  $q$ . Определите силы натяжения нитей. Длины нитей много больше размеров шариков.

# XXII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ имени М.В.Ломоносова, Института педагогических исследований одаренности РАО (г. Новосибирск) и при поддержке Фонда некоммерческих программ «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», Издательского Дома «Первое сентября» и журналов «Квант», «Потенциал» провел XXII Международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила с 12 по 19 октября 2013 года в Барселоне (Испания) на территории уютного отеля «Golden Palace», который расположен на берегу Средиземного моря. На олимпиаду приехали школьники из разных регионов России и Казахстана. В качестве наблюдателей были представители Испании, Великобритании и Польши.

Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В одиннадцатый раз участвовали в олимпиаде школьники, интересующиеся экологией и биологией, соревнуясь в командном туре по истории научных идей и открытий и в индивидуальных турах по биологии и экологии. Педагоги и психологи собрались на свою научную сессию в пятый раз. В рамках олимпиады прошел также II Международный математический турнир имени М.В.Ломоносова для учащихся 5–8 классов (олимпийский резерв олимпиады «Интеллектуальный марафон»). Число участников выросло по сравнению с прошлым годом, что усилило накал интеллектуальных соревнований среди младших школьников.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2013» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда лицея 4 из Таганрога (Россия). Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок. Команда была также лучшей в туре по истории научных идей и открытий и призером в турах по математике и физике. Второе место в общем зачете заняла команда Областного центра дополнительного образования одаренных детей из Ростова-на-Дону (Россия). Она также заняла первое место по математике, второе место по истории

научных идей и открытий и третье по физике. Команде были вручены большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла команда лицея 2 из Альметьевска (Россия). Она также заняла первое место по физике. Ей были вручены кубок и диплом.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Булат Ибрагимов, ученик лицея 2 из Альметьевска. Ему были вручены большая золотая медаль и малая серебряная медаль по физике. Вторым призером в общем зачете стал Кирилл Заруба (лицей 4, Таганрог). Он получил большую серебряную медаль и малую золотую медаль за первое место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевала Юлия Шенщина (лицей 4, Таганрог). Олег Клименко (лицей 13, Ростов-на-Дону) был награжден малой золотой медалью по математике, Камилль Лотфуллин (лицей 2, Альметьевск) получил малую серебряную медаль по математике и Руслан Супрунов (школа 9, Гуково) получил малую бронзовую медаль по математике. Дмитрий Кисель (лицей 4, Таганрог) был награжден малой бронзовой медалью по физике.

На II Международном математическом турнире имени М.В.Ломоносова среди учащихся 7–8 классов победителем стал Роман Тыняно (Областной центр дополнительного образования одаренных детей, Ростов-на-Дону). Призерами стали Владислав Акавец (лицей «Классический», Ростов-на-Дону), Михаил Борисов (лицей 24, Волгодонск), Динасыл Койлыбай (НИШ, Актобе, Казахстан). Среди учащихся 5–6 классов на турнире победителем стал Евгений Примаков (лицей «Классический», Ростов-на-Дону). Призерами стали Степан Шелепов, Арсен Джукусов, Тимур Сарсенбаев, Айша Шень (команда Келешек, Алматы, Казахстан).

Все победители и призеры получили различные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XXIII Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2014 года в Марокко.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: <http://www.gluon.ru>

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ

*Устный командный тур*

### Математика

1. За 2 года завод снизил выпуск продукции на 51%. Каждый год он снижал его на одинаковое количество процентов. На какое?
2. Разрежьте квадрат на 3 части, из которых можно сложить остроугольный неравносторонний треугольник.



*Командный тур олимпиады по физике*

3. Существуют ли попарно различные: а) натуральные, б) нечетные числа  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , сумма обратных величин которых равна 1?

4. Точка пересечения биссектрис треугольника соединена с его вершинами, в результате чего он разбился на 3 меньших треугольника. Один из этих меньших треугольников подобен исходному. Найдите его углы.

5. Существуют ли 100 отличных от нуля чисел, каждое из которых равно квадрату суммы остальных?

6. В классе 33 ученика, всем им вместе 430 лет. Можно ли выбрать из этого класса 20 учеников, которым вместе больше 260 лет? (Возраст ученика – целое число лет.)

7. Найдите все пары натуральных чисел  $x$  и  $y$ , для которых  $2x + 1$  делится на  $y$ , а  $2y + 1$  делится на  $x$ .

8. Сто школьников – пятьдесят мальчиков и пятьдесят девочек – построены в шеренгу. Можно ли выбрать пятьдесят стоящих подряд ребят так, чтобы среди них оказалось поровну мальчиков и девочек?

9. Верно ли, что любой треугольник можно разрезать на 1000 частей, из которых возможно сложить квадрат?

10. Из двухсот последовательных натуральных чисел 1, 2, 3, ..., 200 выбрали 101 число. Верно ли, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое?

### Физика

1. Лучи света от солнца падают на горизонтальную поверхность земли под углом  $\alpha = 30^\circ$ . С земли бросают камень с начальной скоростью  $v_0$ . На каком наибольшем расстоянии от места вылета может оказаться тень от камня? Решение изобразите графически (на рисунке).

2. Запаянный горизонтальный цилиндрический сосуд длиной  $l = 90$  см разделен на две части подвижной перегородкой. С одной стороны от перегородки содержится 2 моля кислорода и 3 моля гелия, с другой – 3 моля азота и 1 моль гелия, и перегородка находится в равновесии. В некоторый момент времени перегородка становится проницаемой для гелия и остается непроницаемой для кислорода и азота. Найдите перемещение перегородки. Температуры газов одинаковы и не меняются в течение процесса.

3. Незвестное число  $N$  одинаковых резисторов соединены в кольцо. Омметр, подсоединенный к концам одного резистора, показывает сопротивление  $R_1 = 16$  Ом. Если соседний к выбранному резистор закортить, то омметр показывает сопротивление  $R_2 = 15$  Ом. Какова величина одного сопротивления? Чему равно  $N$ ?

4. Мяч покатали по полу к стене со скоростью  $v = 5$  м/с. После удара о стену мяч покатился назад со скоростью  $u = 4$  м/с и вернулся в исходную точку через время  $T = 1,8$  с после начала движения. Каково расстояние от исходной точки до стены?

5. В стакан с очень горячей водой опустили ложку, и ложка на глазах стала плавиться. Иногда такую ложку называют деревянной. Поясните наблюдаемое явление и скажите, почему металл, из которого изготовлена ложка, называют деревянным.

6. Одновременно подожгли толстую и тонкую свечи, имеющие первоначально одинаковые длины. Через время  $t = 40$  мин тонкая свеча сгорела наполовину, а толстая – на треть. Через какое время (в минутах) после поджога длины свечей будут различаться в 4 раза?

7. Две одинаковые однородные цепочки из массивных шариков прикреплены концами к потолку и проходят через две невесомые коленчатые трубки, скрепленные между собой (рис. 1). Входные и выходные колена трубок вертикальны, между ними – длинные горизонтальные участки. С

каким ускорением опускаются трубки? Трения и потерь энергии нет.

8. Тонкая линза создает изображение предмета, расположенного перпендикулярно ее главной оптической оси, с некоторым увеличением. Если расстояние от предмета до линзы увеличить вдвое, то получим прямое изображение с увеличением, втрое большим первоначального увеличения. С каким увеличением было получено изображение предмета первоначально?

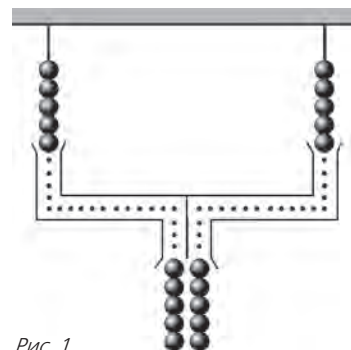


Рис. 1

9. Поясните, почему вблизи берега набегающая морская волна образует белые барашки.

10 (экспериментальная). Представлены две полупрозрачные пластины размером А5, которые при наложении друг на друга то пропускают, то не пропускают свет – в зависимости от взаимной ориентации пластин. При помещении между пластинами пластика с наклеенными кусочками прозрачной липкой ленты последние оказались окрашенными в разные цвета радуги, а при вращении одной из пластин эти кусочки меняли цвет. При наложении одной пластины на экран работающего жидкокристаллического монитора экран под пластиной становился темным. Надо объяснить наблюдаемые явления.

Письменный индивидуальный тур

### Математика

1. Могут ли числа  $N^2 - N$  и  $(N + 1)^2$  иметь равные суммы цифр в десятичной записи ( $N$  – натуральное число)?

2. а) Можно ли сложить квадрат из 20 прямоугольных треугольников с катетами 1 и 2? б) А из 40?

3. Вычислите  $(\alpha^2 - 1) \cdot \sqrt[8]{2\alpha^2 + 3\alpha + 2}$ , если  $\alpha$  – корень уравнения  $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$ .

4. Четыре землекопа вырыли канаву за 2 часа. При этом каждый из них проработал столько времени, сколько нужно остальным трем, чтобы вырыть половину канавы. За сколько времени они вырыли бы всю канаву, работая вместе?

5. Дана таблица  $n \times n$ , в каждой клетке которой записано число, причем все числа в таблице различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Сколько чисел было отмечено?

6. На боковых сторонах  $AB$  и  $CD$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  отложены равные отрезки  $AK$  и  $CL$ . Отрезок  $KL$  пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Найдите  $KP:PQ:QL$ , если  $AD = 2BC$ .

7. Последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n$  такова, что  $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$ ,  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 13$ . Существует ли такой номер  $N$ , что  $x_N = 0$ ?

### Физика

1. Автомобиль движется со скоростью  $v = 10$  м/с по параболическому мосту, переброшенному через реку. Известно, что максимально допустимая скорость автомобиля в верхней точке моста составляет  $v_0 = 40$  м/с. Мост опирается на каждый берег у самой кромки воды. Найдите ширину реки, если автомобиль переезжает мост за время  $\tau = 11,3$  с.

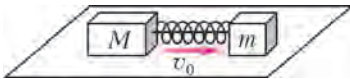


Рис. 2

вставлена деформированная пружина жесткостью  $k = 2,25$  кН/м (пружина не прикреплена к брускам). Эта система брусков движется с постоянной скоростью  $v_0 = 2,5$  м/с. В какой-то момент нить пережигают, после

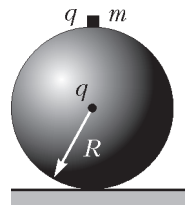


Рис. 3

чего через некоторое время пружина выпадает, а тело массой  $M$  останавливается. Найдите длину недеформированной пружины  $l_0$ .

2. Два бруска массами  $M = 900$  г и  $m = 300$  г связаны нерастяжимой нитью длиной  $l = 20$  см (рис.2). Между брусками

3. Небольшое тело массой  $m = 1,4$  г соскальзывает из состояния покоя с вершины гладкой сферы радиусом  $R = 60$  см (рис.3). На теле и в центре сферы размещают одинаковые по величине разноименные заряды такие, чтобы тело не отрывалось от поверхности сферы, пока оно не окажется на высоте, равной  $R/2$  от поверхности, на которой покоится сфера. Какова величина этих зарядов?

4. На концах легкой доски длиной  $L$  уселись два одинаковых маленьких, но тяжелых гномика массой  $m$  каждый (рис.4). Доску положили на подставку шириной  $l < L$  так,

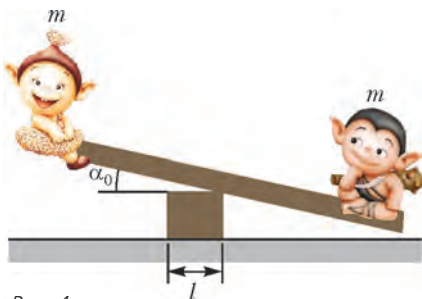


Рис. 4

что ее середина оказалась над серединой подставки, и отклонили на небольшой угол  $\alpha_0 \ll 1$  (рад). Определите период  $T$  малых колебаний этой системы, если при переходе доски с одного ребра подставки на другое ребро потери энергии пренебрежимо малы, а доска от подставки не отрывается и не проскальзывает. Посчитайте этот период, если  $L = 5$  м,  $l = 1$  м,  $\alpha_0 = 0,1$  рад,  $m = 12$  кг.

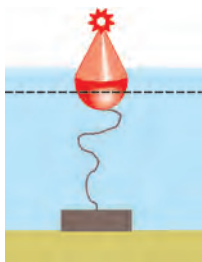


Рис. 5

5. Бакен объемом  $V = 150$  л на две трети объема погружен у берега в воду (рис.5). Он привязан веревкой длиной  $l = 5$  м к бруску массой  $m = 50$  кг, лежащему на песчаном дне водоема глубиной  $h = 4,5$  м. Ветка немного провисает. Сможет ли брусок оторваться от дна при повышении уровня воды во время прилива? Каким будет результат, если дно представляет собой крупную гальку? Площадь верхней поверхности бруска  $S = 400$  см<sup>2</sup>, плотность материала бруска  $\rho = 8$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_0 = 1$  г/см<sup>3</sup>, атмосферное давление  $p_a = 10^5$  Па.



Рис. 6

6. Колба, заполненная воздухом, имеет объем  $V = 1$  л, ее горлышко представляет собой цилиндр высотой  $H = 25$  см и диаметром  $d = 3,6$  см (рис.6). Горлышко закрыто тонким невесомым поршнем, расположенным почти у самого верха. В горлышко начинают медленно наливать ртуть (плот-

ность ртути  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup>). Сначала поршень опускается на 21 см, затем останавливается, и жидкость начинает стекать через края горлышка. Найдите, какова масса жидкости, залитой в горлышко, и при каком атмосферном давлении проводился опыт (давление выразите в мм рт.ст.). Температуру считайте постоянной. Трением пренебрегите.

7. Известно, что когда луч света падает на плоскую стеклянную пластинку перпендикулярно ее поверхности, то 8% световой энергии отражается (здесь учтено отражение от обеих поверхностей пластинки), а 92% проходит. Следовательно, коэффициент отражения  $R = 0,08$ , коэффициент пропускания  $D = 0,92$ . Найдите коэффициент пропускания стопки из  $n = 11$  таких стеклянных пластинок.

### История научных идей и открытий

#### Математика

1. Математики Древней Греции называли совершенным натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей, т.е. делителей, отличных от самого числа. Конечно или бесконечно множество совершенных чисел, не известно до сих пор – это так называемая проблема совершенных чисел. Число, большее (меньшее) суммы всех своих собственных делителей, древние греки называли избыточным (недостаточным).

Вясните, конечно или бесконечно множество: а) избыточных, б) недостаточных чисел.

2. Итальянский математик Никколо Тарталья обнаружил много интересных соотношений между степенями целых чисел. В частности, он доказал, что всякое кубическое число (т.е. куб) равно разности двух квадратных чисел (т.е. квадратов).

Докажите это и вы.

3. В 1585 году фламандский инженер Симон Стевен опубликовал книгу о десятичных дробях, и с тех пор десятичные дроби стали основным аппаратом инженерных и иных расчетов.

а) Представьте в виде бесконечной десятичной дроби обыкновенную дробь  $1/37$ .

б) Обратите в обыкновенную дробь бесконечную периодическую дробь  $0,25(243)$ .

4. Великий немецкий математик К.Ф.Гаусс измерял углы треугольника, образованного вершинами трех удаленных друг от друга гор.

Зачем он это делал?

5. До середины XVII века в теории вероятностей не было не только цельной математической теории, но даже никакого общего метода решения задач. В середине XVII века Б.Паскаль, П.Ферма и Х.Гюйгенс разработали методы решения вероятностных задач, похожих на предлагаемую вам задачу:

Что более вероятно – выиграть у равносильного противника три партии из четырех или пять партий из восьми?

#### Физика

1. Для изучения строения материи современная физика использует как теоретические, так и экспериментальные методы. Для исследования взаимодействий элементарных частиц необходимы источники элементарных частиц высоких энергий. За последние полвека для физических исследований построены ускорители элементарных частиц с различными энергиями частиц в пучке. В 2008 году произведен пуск самого мощного на сегодня ускорителя элементарных частиц, который позволил экспериментально проверить теоретические представления физики высоких энергий. Результаты экспериментальных исследований на нем дали подтверждение теоретическим открытиям полувеко-



вой давности, удостоенных в 2013 году Нобелевской премии по физике.

а) Какой ускоритель был запущен в 2008 году?

б) Где он расположен?

в) На какую энергию частиц рассчитан этот ускоритель?

г) Какие полученные на нем результаты вам известны?

2. Сто лет назад Нобелевская премия по физике была вручена «за исследования свойств вещества при низких температурах, которые привели к производству жидкого гелия». В ходе этих исследований была обнаружена сверхпроводимость металлов и сверхтекучесть жидкого гелия. Коллеги называли этого ученого «Господин Абсолютного Нуля». Он был не только физиком, но и талантливым инженером. Среди его разработок, например, вагон-рефрижератор.

а) О каком ученом идет речь?

б) В какой стране он жил и работал?

3. Эта идея к началу XIX века была принята почти всеми химиками мира. В 1860 на Всемирном съезде химиков в Карлсруэ были окончательно сформулированы химические аспекты этой идеи. Однако почти все физики считали ее, в лучшем случае, неплохой расчетной моделью, но не картиной физической реальности. Известные физики Г.Гельмгольц и Э.Мах вообще утверждали, что эта идея лишена физического основания, утверждая, что материя непрерывна. Только такие выдающиеся физики, как Дж.Максвелл, Л.Больцман, А.Эйнштейн, Э.Резерфорд и некоторые другие, уверенно утверждали, что эта идея определяет наши воззрения на строение материи. Двадцатый век подтвердил их правоту. Эта идея сегодня не только позволяет ученым строить новые теории, но и широко представлена в инженерной практике в области химии, материаловедения, нанотехнологий.

а) Сформулируйте эту идею.

б) Какие решения упомянутого съезда 1860 года сформулированы в рамках этой идеи?

4. Современные научно-технические разработки основаны на нанотехнологиях. Для их осуществления требуется информация о расположении отдельных атомов и молекул вещества. В 1986 году был построен первый прибор, позволяющий получить такую информацию. В основе действия этого прибора лежит использование сил Ван-дер-Ваальса, действующих между атомами зонда и отдельными частицами вещества. Для регистрации этого взаимодействия используется измеритель наноперемещений. Этот прибор может применяться для определения микрорельефа поверхности любых веществ, как проводящих, так и непроводящих, с его помощью можно наблюдать всевозможные несовершенства структуры, локализованные на изучаемых поверхностях, например дислокации или заряженные дефекты, а также всяческие примеси.

Назовите этот прибор.

5. В 1959 году известный физик впервые опубликовал работу, в которой научно доказал, что с точки зрения фундаментальных законов физики нет никаких препятствий к тому, чтобы создавать вещи прямо из атомов. В этой работе оценивались перспективы миниатюризации. Основные положения нанотехнологий были намечены в его легендарной лекции «Там, внизу, много места» («There is Plenty of Room at the Bottom»), произнесенной им в Калифорнийском технологическом институте.

а) Кто является автором этих идей?

б) Какие его наиболее яркие достижения в физике вам известны?

## II МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5–8 КЛАССОВ

### 5–6 классы

#### Устный командный тур

1. Дан квадрат  $ABCD$  со стороной 12,  $K$  – середина стороны  $AB$ ,  $L$  – середина стороны  $BC$ . Найдите площадь треугольника  $DKL$ .

2. Четным или нечетным числом будет сумма всех последовательных натуральных чисел от 1 до 2013 включительно?

3. Найдите количество всех четырехзначных чисел, которые не делятся на 3.

4. Найдите, как разрезать прямоугольник со сторонами 16 см и 9 см на две равные части, из которых можно составить квадрат.

5. С помощью всех 10 цифр, взятых по одной, и арифметических действий запишите арифметическое выражение, равное 9.

6. На каждую из шести граней кубика произвольным образом помещено одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Объясните, почему обязательно найдутся две соседние грани, на которых расположены соседние числа.

#### Письменный индивидуальный тур

1. В прямоугольнике сумма двух каких-то сторон равна 19 см, а сумма трех каких-то сторон равна 15 см. Найдите периметр этого прямоугольника.

2. Скорость течения реки, соединяющей пункты  $A$  и  $B$ , весной равна 2 км/ч, летом 1 км/ч, а скорость катера относительно воды равна 16 км/ч. Определите, весной или летом катеру потребуется меньше времени, чтобы проплыть из  $A$  в  $B$  и обратно. Ответ необходимо обосновать.

3. В начале 2013-значного числа стоят 2012 единиц, последняя цифра 9. Является ли это число квадратом натурального числа?

4. Найдите сумму  $2013 - 2012 + 2011 - 2010 + \dots - 4 + 3 - 2 + 1$ .

5. На какую наибольшую степень числа 3 делится произведение всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно?

6. Фигуру, составленную из пяти равных квадратов (рис. 7), разрежьте на четыре равные между собой фигуры.

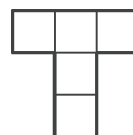


Рис. 7

### 7–8 классы

#### Устный командный тур

1. Дан квадрат  $ABCD$  со стороной 6,  $E$  – середина стороны  $CD$ , отрезки  $AC$  и  $BE$  пересекаются в точке  $F$ . Найдите площадь четырехугольника  $ADEF$ .

2. Какое наименьшее значение имеет сумма  $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4|$ ?

3. В школе экзамен по математике сдавали 68 учащихся, и каждый получил одну из оценок «3», «4» или «5». При сложении всех оценок получили число 270. Определите, каких оценок поставлено больше: троек или пятерок и на сколько.

4. В прямоугольнике  $ABCD$  точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно. Через точку  $M$  проводится прямая, пересекающая диагональ  $AC$  в точке  $P$  и продолжение стороны  $BC$  в точке  $Q$ , причем точка  $B$  лежит между точками  $C$  и  $Q$ . Докажите, что  $\angle MNP = \angle MNQ$ .

5. Представьте число  $\sqrt{737 - 108\sqrt{2}}$  в виде  $a + b\sqrt{2}$ , где  $a$ ,  $b$  – некоторые целые числа.

6. На столе лежат 20 кучек орехов. Разрешается добавлять по одному ореху одновременно к любым 3 кучкам. Докажите, что, повторяя эту операцию, можно уравнивать количество орехов во всех кучках.

*Письменный индивидуальный тур*

1. Все натуральные числа от 1 до 2013 включительно выписали подряд и нашли сумму всех цифр. Найдите, какой остаток получится при делении этой суммы на 9.

2. Решите уравнения: а)  $|x - 3| + |x + 3| = 6$ ; б)  $|x - 3| + |x| + |x + 3| = 6$ .

3. Представьте число  $1/3$  в виде суммы шести дробей вида  $1/n$ , все знаменатели которых – различные натуральные числа.

4. Докажите, что если  $a + b + c = 0$ , то

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

5. В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  на стороне  $AB$ ,  $N$  на стороне  $BC$ ,  $K$  на стороне  $CA$  поставлены так, что  $AM : MB = BN : NC = CK : KA = 4 : 3$ . Какую часть площади треугольника  $ABC$  составляет площадь треугольника  $MNK$ ?

6. Каждая сторона и каждая диагональ выпуклого шестиугольника окрашена либо в красный, либо в зеленый цвет. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в вершинах этого шестиугольника, все стороны которого окрашены в один цвет.

*Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштон, А.Марковичев, Ж.Работ, Л.Шляпочник*

## Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2014 года

Московский (II) тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 5 апреля 2014 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) имени Н.Э.Баумана. В командном зачете первое место заняла команда МГТУ имени Н.Э.Баумана, набравшая 194 балла, второе место – команда Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина, набравшая 129 баллов, и третье место – команда Калужского филиала МГТУ имени Н.Э.Баумана, набравшая 114 баллов. Победителями в личном зачете стали: Бланк Сергей – первое место, Шибаев Максим – второе место и Рогожинский Константин – третье место (все трое – из МГТУ имени Н.Э.Баумана).

Заключительный (III) тур олимпиады состоялся 15 мая тоже в МГТУ имени Н.Э.Баумана. В командном зачете первое место завоевала команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПбГПУ), набравшая 125 баллов, второе место – команда МГТУ имени Н.Э. Баумана, набравшая 94 балла, и третье место – команда Московского авиационного института, набравшая 50 баллов. Победителями в личном зачете стали: Соболев Антон (СПбГПУ) – первое место, Авдеев Иван (СПбГПУ) – второе место и Шибаев Максим (МГТУ имени Н.Э.Баумана) – третье место.

### ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

#### Московский тур

1. Горизонтально расположенный резиновый шнур правым концом закрепили на стенке, а его левый конец тянут в горизонтальном направлении влево с постоянной скоростью  $v$ . Жук ползет по шнуру от стенки к левому концу с постоянной скоростью  $u$ . Определите максимальное расстояние между правым концом шнура и жуком в процессе дальнейшего движения при  $v > u$ . Начальная длина шнура равна  $l$ .

2. Санки длиной  $l$  съехали с горки по снегу и, разогнавшись до скорости  $v_0$ , въехали на горизонтальный участок с

асфальтом. Определите путь, который пройдут санки по асфальту до полной остановки, если коэффициент трения санок с асфальтом равен  $\mu$ .

3. Космическая станция движется по стационарной круговой орбите радиусом  $R$  вокруг Земли. Станция представляет собой два шара массой  $m$  и радиусом  $r$ , соединенных жестким стержнем длиной  $L$  ( $r \ll L \ll R$ ). Определите угловую скорость вращения  $\omega_0$  станции вокруг оси вращения, совпадающей с жестким стержнем, необходимую для того, чтобы угол между радиусом-вектором станции, проведенным от центра Земли, и осью вращения станции был равен  $\alpha$  и оставался постоянным. Учтите изменение силы тяжести на расстоянии  $L$ .

4. Поршень площадью  $S$  и массой  $M$  лежит на дне вертикально расположенного цилиндра, верхний конец которого открыт в атмосферу. Через небольшое отверстие в дне цилиндра под поршень медленно закачивают воздух из атмосферы до тех пор, пока поршень не поднимется на высоту  $h$ . Определите совершенную работу, считая, что процесс изотермический.

5. Металлический полуцилиндр радиусом  $R$  и длиной  $L \gg R$ , образованный секущей плоскостью, проходящей через его ось, заряжен зарядом  $Q$ . Основание этого полуцилиндра закрыто диэлектрической пластиной длиной  $L$  и шириной  $2R$ , заряженной равномерно по поверхности зарядом  $q$ . Определите силу взаимодействия между пластиной и полуцилиндром.

6. По полубесконечному цилиндрическому соленоиду радиусом  $R$  с плотностью намотки  $n$  протекает ток  $I$ . Определите поток магнитного поля, пронизывающего кольцо радиусом  $2R$ , лежащего в плоскости среза, центр которого совпадает с осью цилиндра.

7. Две плоские гармонические электромагнитные волны интенсивностью  $I_0$  распространяются в вакууме: первая вдоль оси  $x$ , вторая вдоль оси  $y$ . Векторы напряженности  $E$  обеих волн колеблются вдоль оси  $z$ . Постройте годограф вектора Пойнтинга  $S$  в точке, где разность фаз между волнами равна  $\pi/2$ .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

1. Автомобиль движется по ровной горизонтальной поверхности, коэффициент трения с которой равен  $\mu$ . Автомобиль должен совершить поворот на  $90^\circ$  градусов за минимально возможное время. Считая, что начало маневра совпало с началом координат, а ось  $y$  направлена по вектору скорости, величина которой в начале и конце поворота равна  $v$ , определите траекторию движения за время совершения маневра.

2. Тонкая нерастяжимая и абсолютно гладкая нить закреплена на потолке в точках  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми равно  $a$ . Длина нити  $l = 2a$ . Из точки  $A$  начинает скользить маленькое кольцо, в которое продета нить. Определите скорость кольца сразу после натяжения нити.

3. На длинных невесомых нитях, касаясь друг друга, подвешена очень длинная цепочка шариков одинакового диаметра, масса которых убывает, образуя прогрессию. Определите эту прогрессию, если известно, что когда первому шарiku ударом придают скорость  $v_0$ , то вся цепочка, кроме последнего шарика, после серии абсолютно упругих соударений начинает двигаться как единое целое со скоростью  $v_0/2$ .

4. Определите период колебаний треугольника, состоящего из трех стержней одинаковой массы, относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через вершину  $O$ , в которой сходятся стержни  $a$  и  $b$ . Длина и ориентация этих стержней заданы векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

5. Нагретый у поверхности Земли в экваториальной части воздух поднимается в верхние слои атмосферы и впослед-

ствии опускается к поверхности Земли в полярных областях. Принимая, что воздух, поднимаясь в верхние слои атмосферы или опускаясь вниз, расширяется или сжимается адиабатически, определите изменение температуры воздуха с высотой  $T(z)$ , считая, что на поверхности Земли температура равна  $T_0$ .

6. Диэлектрическая поверхность в форме куба с ребром  $l$  заряжена равномерно по поверхности с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Определите силу, действующую на грань куба.

7. Заряженная частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  движется со скоростью  $v$  в магнитном поле диполя в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Магнитное поле диполя меняется с расстоянием по закону  $B = a/r^3$ . Определите минимальное расстояние, на которое может приблизиться частица к диполю, если она начинает движение из бесконечно удаленной точки в направлении к диполю строго вдоль радиуса-вектора  $\vec{r}$ .

8. Заряд  $q$  с массой  $m$  движется по замкнутой траектории под действием постоянного однородного магнитного поля с индукцией  $B$ , направленной по оси  $y$ , и переменного электрического поля  $E = E_0 \cos \omega t$ , направленного по оси  $z$ . При каких условиях движение заряда будет периодическим с круговой частотой, совпадающей с круговой частотой  $\omega$  изменения электрического поля? Определите зависимости от времени проекций  $v_z$  и  $v_x$  скорости заряда. Какова будет при этом траектория движения заряда?

Публикацию подготовили  
А.Макаров, В.Голубев, В.Глушков

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. 6.

Пусть Аня отдала половину своих грибов Вите. Теперь у всех ребят стало поровну грибов (и это означает, что у Вити своих грибов не было). Чтобы Саша получил все Анины грибы, ему надо забрать грибы у Ани и у Вити. Тогда у него будут грибы троих ребят: Ани, Вити и его собственные. Еще столько же будет у остальных ребят. Значит, в лес ходило еще трое детей, имена которых нам не сообщили.

2. Одна из подходящих фигур изображена на рисунке 1.

3. Поезд №392, вагон №2.

Посмотрим на самую длинную телеграмму. Видно, что в правой и левой частях написано одно и то же: ЕТ – ОЙ. Это

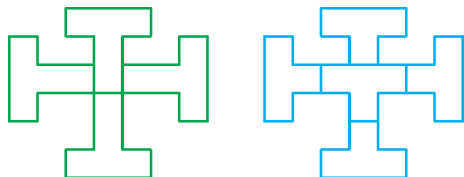


Рис. 1

значит, что и в старших разрядах слева и справа будет одно и то же: СЕКР – ОТКР = ОТВ – ТВ. Теперь, если выполнить вычитания, то справа и слева сократятся по две буквы, т.е. на концах будет по два нуля. Если разделить на 100, то получится  $СЕ - ОТ = 0$ .

Теперь посмотрим на последнюю телеграмму. Если записать ее как пример на сложение в столбик:

$$\begin{array}{r} \text{О Т К Р Ы Т} \\ + \quad \text{2 0 0 1 0} \\ \hline \text{С Е К Р Е Т} \end{array}$$

то видно, что  $ОТ + 2 = СЕ$ . Сопоставив это с предыдущим равенством, можно понять, что  $О = 2$ , а тогда  $С = 3$ . Кроме того, при сложении произошел перенос из разряда в разряд десятков, т.е.  $Т = 8$  или  $Т = 9$ . Но если предположить, что  $Т = 8$ , то получится, что  $Е = 0$ , а тогда при сложении  $Ы + 1 = Е$  (т.е.  $Ы + 1 = 0$ ) неизбежно произошел бы перенос в следующий разряд. Но этого не было, значит,  $Т = 9$ , и мы узнали значения всех нужных цифр.

4. а) 25.

Все одуванчики, которые позавчера были желтыми, стали белыми вчера или сегодня. Поэтому позавчера было  $14 + 11 = 25$  желтых одуванчиков.

б) 9.

Из вчерашних желтых одуванчиков 11 побелели сегодня, а оставшиеся  $20 - 11 = 9$  побелеют завтра.

5. В треугольнике  $ABC$  углы  $A$  и  $C$  равны как соответственные углы равных бумажных треугольников (рис. 2); значит, треугольник  $ABC$  равнобедренный и  $AB = BC$ . Но и его стороны  $AB$  и  $AC$  равны (как соответственные стороны равных бумажных треугольников). Значит, треугольник  $ABC$  равносторонний.

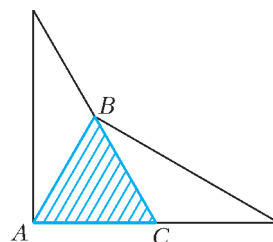


Рис. 2

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6-8»

(см. «Квант» № 1)

11. Существуют.

Например, подойдут числа 2, 12, 3, 4:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ .

Подобные примеры получаются следующим образом: нужно взять любые четыре различных натуральных числа  $x, y, z, t$  с условием  $x + y = z + t$  и разделить это равенство на общее кратное этих чисел. В нашем примере  $x = 6, y = 1, z = 4, t = 3$ , а в качестве общего кратного было выбрано их наименьшее общее кратное 12.

12. 12.

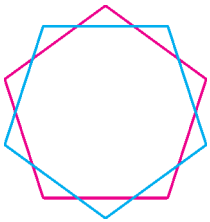


Рис. 3

Примером могут служить два правильных пятиугольника, симметричных друг другу относительно их общего центра (рис.3).

Докажем, что больше 12 частей быть не может. Отрезок может пересекать границу выпуклого многоугольника не более чем в двух точках. Контур одного пятиугольника состоит из пяти отрезков, поэтому он пересекается с контуром другого пятиугольника не более чем в  $5 \cdot 2 = 10$  точках.

Сделаем сначала разрез по контуру первого пятиугольника. После этого лист распадется на две части – внешнюю и внутреннюю.

Точки пересечения контуров первого и второго пятиугольника делят контур второго пятиугольника на  $k \leq 10$  ломаных. Будем разрезать лист по очереди вдоль каждой из этих ломаных. При каждом таком разрезе количество частей плоскости увеличивается ровно на 1. Поэтому общее количество частей равно  $2 + k \leq 12$ .

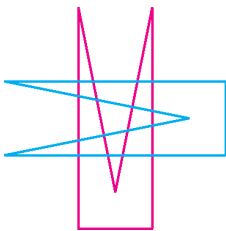


Рис. 4

*Замечание.* В решении существенно используется условие выпуклости пятиугольников. Если рассматривать и невыпуклые пятиугольники, то количество частей может быть больше 12. На рисунке 4 показан пример для 18 частей.

13. 200.

Перепишем уравнение в виде  $xy - x - y = 999999999$ . Если прибавить к обеим частям по 1, то слева получится выражение, которое раскладывается на множители:  $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$ . Уравнение превращается в такое:  $(x - 1)(y - 1) = 1000000000 = 10^9 = 2^9 \cdot 5^9$ . Поскольку мы ищем решения в целых числах, то первый из сомножителей в левой части делит правую часть, а значит, имеет вид  $\pm 2^m \cdot 5^n$ , где  $m$  и  $n$  могут меняться от 0 до 9 (ясно, что  $x$  определяется однозначно по первому сомножителю). Таких чисел всего 200. Если первый сомножитель известен, то второй (а вместе с ним и  $y$ ) определяется однозначно. Значит, всего решений у данного уравнения тоже 200.

14. Прямоугольному.

Если мы сложили из двух треугольников один, то какой-то угол одного вместе с каким-то углом другого составил  $180^\circ$ . Так как прямоугольный треугольник всего один, то это не могут быть два прямых угла. Значит, один из них острый, а другой – тупой. Поэтому один из двух складываемых треугольников тупоугольный. Если полученный треугольник остроугольный, то и второй прикладываемый треугольник остроугольный, а это противоречит условию. Значит, получился прямоугольный треугольник (не составляет труда убедиться в том, что такое действительно возможно).

15. Пусть в стране всего  $n$  городов. Выберем любые два из них, А и Б. Теперь распределим маршруты между авиакомпаниями.

Первая компания будет совершать рейсы из А во все города, кроме Б, вторая – из Б во все города, кроме А, третья – все остальные рейсы (т.е. из А в Б и все рейсы между оставшимися  $n - 2$  городами). Покажем, что при таком распределении маршрутов для любой авиакомпании есть хотя бы два таких города, что попасть из одного в другой только рейсами этой авиакомпании нельзя. Для первой и второй авиакомпаний можно взять пару городов А и Б: напрямую можно лететь только третьей компанией, а на всех остальных маршрутах придется делать пересадки на рейсы других компаний. Для третьей авиакомпании подойдут город А и любой другой город, кроме Б.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Понятия «истинная траектория» не существует. Вид траектории зависит от выбора системы отсчета.
2. Если начальная скорость человека относительно платформы совпадает по направлению со скоростью платформы относительно земли или противоположна ей, то траектория человека относительно земли прямолинейная, в иных случаях – криволинейная.
3. Когда трамвай начинает двигаться с ускорением.
4.  $\vec{F} = m\vec{a}$ .
5.  $\alpha = \arctg(a/g)$ ; как видно из формулы, угол  $\alpha$  от массы груза не зависит.
6. Угол  $\alpha$  не зависит от вида жидкости и определяется по той же формуле, что и в задаче 5. Толщина слоя воды над ртутью будет всюду одинакова, и наклон поверхности ртути не изменится.
7. Шарик будет тянуться вперед по ходу автомобиля.
8. При скольжении без трения поверхность воды расположится параллельно наклонной плоскости; при ускоренном скольжении с трением угол наклона поверхности воды к горизонту станет меньше  $\alpha$ ; если движение станет равномерным, то угол будет равен нулю.
9. Пробка останется неподвижной относительно стенок сосуда.
10. При свободном падении столб воды не оказывает гидростатического давления, поэтому уровень воды в пробирке будет опускаться до тех пор, пока давление воздуха внутри пробирки не сравняется с внешним давлением.
11. Период колебаний по величине останется равным  $T$ , однако маятник будет колебаться «вверх ногами».
12. Нить отвеса установится перпендикулярно полу салона самолета.
13. Нет, так как относительно земли велосипедист покоится и его центростремительное ускорение равно нулю.
14. Вес тела на полюсе больше, чем на экваторе. Однако обнаружить это можно с помощью не рычажных, а пружинных весов. Когда же рычажные весы уравновешены, можно лишь утверждать, что вес тела равен весу гирь.
15. Пробка расположится у оси вращения сверху, свинец – у стенки цилиндра внизу, тело А – в любом положении (если не учитывать сжимаемость воды).
16. На запад. Причина явления – действие кориолисовой силы инерции, возникающей из-за вращения Земли.

Микроопыт

Сила тяжести воды и сила реакции дна ведра при достаточной скорости удерживают в верхней точке воду на круговой траектории. В системе отсчета, связанной с ведром, этот эффект можно объяснить появлением центробежной силы инерции, прижимающей воду ко дну.

**СВЕРХЗВУКОВЫЕ АВТОБУСЫ, ЛОДКИ И... ДЕРЕВЬЯ**

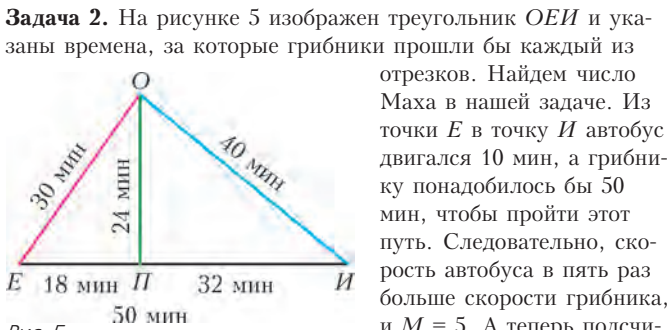


Рис. 5

Из точки *E* в точку *I* автобус двигался 10 мин, а грибнику понадобилось бы 50 мин, чтобы пройти этот путь. Следовательно, скорость автобуса в пять раз больше скорости грибника, и  $M = 5$ . А теперь подсчитаем, когда автобус придет в точку *П*. Время будет отсчитывать от момента выхода грибников из точки *O*. Автобусу понадобится 30 мин, чтобы доехать до точки *E* и еще  $18/5$  мин, чтобы из *E* доехать до *П*, всего – 33 мин 36 с. А Петр дойдет до точки *П* за 24 мин. Итого, ему придется подождать 9 мин 36 с.

**Задача 3.** Отметим сразу, что коли автобус приехал в точку *П* за 33 мин 36 с, то в момент начала движения грибников он находился от этой точки на расстоянии 168 мин движения грибников. Из условия задачи вытекает, что точка *O* находится в начальный момент внутри конуса Маха. А вот Сидору придется обязательно отправиться в путь, когда образующая конуса Маха коснется точки *O* (рис.6). В этот

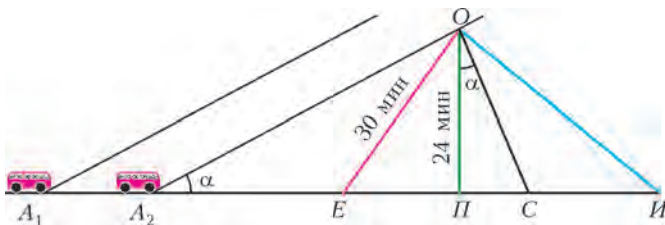


Рис. 6

момент автобус будет находиться от точки *П* на расстоянии  $OP \operatorname{ctg} \alpha = 24\sqrt{24}$  мин движения грибника. Итого, у Сидора в запасе столько времени, сколько понадобится автобусу, чтобы проехать из точки *A*<sub>1</sub> в точку *A*<sub>2</sub>. Грибнику, чтобы пройти этот участок, нужно  $(168 - 24\sqrt{24})$  мин, а автобусу – в пять раз меньше, т.е.  $\approx 10$  мин 5 с. Именно столько времени есть у Сидора в запасе.

**Задача 4.** Области достижимости автобуса изображены на рисунке 7.

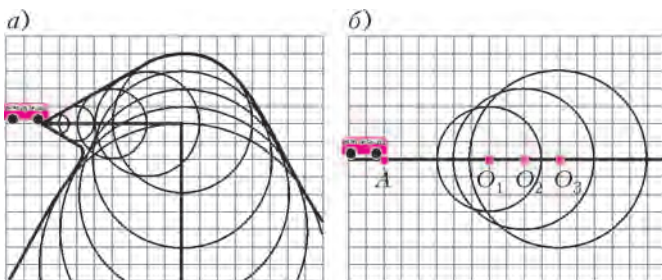


Рис. 7

**Задача 5.** Приведем лишь ответы:  $\beta = 90^\circ$ ,  $d = \frac{L}{c} \sqrt{v^2 - c^2}$ ,  $s = \frac{L}{c} \sqrt{v^2 + c^2}$ .

**Задача 6.** Ответы:  $\beta = \arccos \frac{c}{v}$ ,  $t = \frac{L}{c} \frac{v}{\sqrt{v^2 - c^2}}$ ,  $d = \frac{L}{c} \sqrt{v^2 - c^2}$ ,  $s = \frac{L}{c} v$ .

**Задача 7.** По условию задачи время возвращения

$$t_2 = \frac{L}{c} \frac{v}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

в два раза больше времени переправы  $t_1 = \frac{L}{c}$ .

Отсюда получаем ответ:

$$\frac{v}{c} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15; \quad s_1 = \frac{\sqrt{c^2 + v^2}}{v} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1,32.$$

**Задача 8.** 1)  $t = 7$  мин 12 с. 2)  $M = 5$ .

**Задача 9.** 1)  $t_{\min} = t_0 \sqrt{1 - M^2 \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}}$ . 2)  $M_{\max} = \frac{n+1}{n-1}$ .

**Задача 10.**  $\beta = \arccos \frac{v}{c} = \arccos 0,8$ ;  $u = \sqrt{c^2 - v^2} = 3$  м/с;  $t = \frac{L}{u} = 40$  с.

**ПАРЫ. ВЛАЖНОСТЬ**

1.  $\rho_n = 18$  г/м<sup>3</sup>.
2.  $\Delta m = 257$  г.
3.  $p_k = 4$  атм.
4.  $\phi = 30\%$ .
5.  $n = 4$ .
6.  $p_k = 92$  кПа.
7.  $\Delta m = 3$  г.

**XXII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»**

**ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ НАУКАМ**

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. На 30%.

Пусть завод производил продукции в количестве  $a$  каких-то единиц, а искомое снижение было на  $p\%$  в год. Тогда в конце первого года он произвел продукцию в количестве  $a -$

$$\frac{ap}{100} = a \left(1 - \frac{p}{100}\right) = b, \text{ а в конце второго года - в количестве } b \left(1 - \frac{p}{100}\right) = a \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2.$$

По условию,

$$a \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = a \cdot \frac{49}{100} \Leftrightarrow 1 - \frac{p}{100} = \pm \frac{7}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 30, \\ p_2 = 170. \end{cases}$$

По смыслу задачи остается лишь первый корень.

2. Пусть  $ABCD$  – данный квадрат (рис. 8). Пусть  $M$  – точка на стороне  $AD$ , причём  $AM > MD$ . Проведем из точки  $M$  перпендикуляр к стороне  $AD$ , пересекающий сторону  $BC$  в точке  $N$  так, что точка  $N$  – середина отрезка  $ME$ . Тогда отрезок  $AE$  пересечет сторону  $BC$  в середине  $K$  отрезка  $BN$ , а отрезок  $ED$  – в середине  $L$  отрезка  $NC$  (это следует из равенства двух пар прямоугольных треугольников  $ABK$  и  $KEN$ ,  $CDL$  и  $ECL$ ). Если отрезать от квадрата треугольники  $ABK$  и  $CDL$  и совместить их с треугольниками  $ENK$  и  $NEL$  соответственно, то квадрат  $ABCD$  превращается в равнобедренный треугольник  $AED$ .

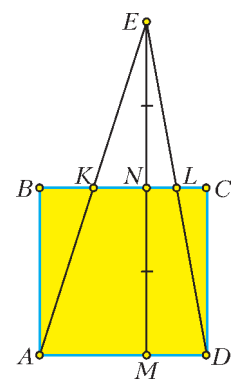


Рис. 8

3. а) Да; б) нет.

а) Ответ следует из следующей цепочки равенств:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}.$$

б) Предположим, что нашлись попарно различные нечетные

числа  $x_1, x_2, \dots, x_5$  такие, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 1. \quad (*)$$

Тогда

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{7} = \frac{101}{105} < 1,$$

что противоречит равенству (\*).

4.  $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}$ .

Пусть  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – углы треугольника  $ABC$  (при вершинах  $A, B$  и  $C$  соответственно),  $I$  – его инцентр (центр вписанной в него окружности), причем  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  (рис. 9). Пусть тре-

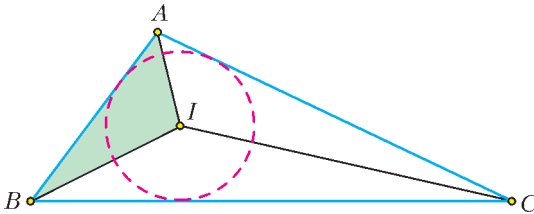


Рис. 9

угольник  $AIB$  подобен треугольнику  $ABC$ . Легко понять, что угол при вершине  $I$  треугольника  $AIB$  – тупой, поэтому он самый большой по величине в этом треугольнике, значит, он равен  $\alpha$ . Для остальных углов, очевидно, верны равенства  $\frac{\alpha}{2} = \beta \Leftrightarrow \alpha = 2\beta$  и  $\frac{\beta}{2} = \gamma \Leftrightarrow \beta = 2\gamma$ . Итак, углы треугольника  $AIB$  (и, конечно, подобного ему треугольника  $ABC$ ) равны  $4\gamma, 2\gamma$  и  $\gamma$ , а их сумма равна  $\pi$ , откуда получаем указанный ответ.

Остальные треугольники с вершиной в точке  $I$  не могут быть подобными исходному: их тупые углы не могут равняться наибольшему углу  $\alpha$  треугольника  $ABC$ . Действительно, если  $\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} = \alpha$ , то наименьший угол  $\gamma$  треугольника  $ABC$  может быть равным только  $\frac{\alpha}{2}$  (не может же он равняться своей половине,  $\frac{\gamma}{2}$ ), но оставшиеся углы  $\beta$  и  $\frac{\gamma}{2}$  не могут равняться друг другу. Если же  $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$ , то получаем  $\alpha = \pi$ , что невозможно.

5. Да, существуют.

Пусть  $x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = a$ . По условию,

$$a = (99a)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = \frac{1}{99^2}. \end{cases}$$

Нас устраивает только второй корень.

6. Да, можно.

Предположим, что сумма возрастов 20 самых старших учеников не больше 260, тогда самый младший из них не старше 13 лет (иначе возраст каждого из них больше 13, а тогда сумма их возрастов больше чем  $20 \cdot 13 = 260$ , вопреки предположению). Но тогда каждый из оставшихся 13 учеников тоже не старше 13 лет, поэтому сумма возрастов всех 33 школьников получается не больше чем  $13 \cdot 13 + 260 = 169 + 260 = 429 < 430$ , что противоречит условию. Мы пришли к противоречию с предположением.

7. (1; 1); (1; 3); (3; 1); (3; 7); (7; 3).

Пусть сначала  $x = 1$ , тогда  $2x + 1 = 3$  и делится лишь на 1 и на 3. Аналогично при  $y = 1$ . Отсюда получаем три первые пары из ответа.

Пусть теперь целые числа  $x$  и  $y$  не меньше чем 2. Заметим, что при этих значениях  $x$  и  $y$  имеем  $xy - (x + y) = (x - 1)(y -$

$- 1) - 1 \geq 0$ , т.е.

$$xy \geq x + y. \quad (**)$$

По условию, число  $\frac{2x+1}{y} + \frac{2y+1}{x} = \frac{2(x+y)+1}{xy} + 4$  – целое,

поэтому и число  $\frac{2(x+y)+1}{xy}$  – целое, но в силу неравенства

(\*\*) это число не больше чем  $2 + \frac{1}{xy} < 3$  при рассматриваемых значениях  $x$  и  $y$ .

Пусть оно равно 2. Тогда  $2(x+y) + 1 = 2xy$ , что невозможно, так как слева стоит нечетное число, а справа – четное.

Пусть оно равно 1. Тогда  $2(x+y) + 1 = xy$ , откуда  $(x-2)(y-2) = 5$ . Один из множителей левой части равен 1, а второй равен 5, откуда получаем остальные ответы.

В силу положительности числителя и знаменателя рассматриваемое число не может быть меньше или равно нулю.

8. Да, можно.

Занумеруем ребят по порядку числами от 1 до 100. Рассмотрим 50 первых ребят. Если среди них равное количество мальчиков и девочек, задача решена. Если же нет, предположим, что мальчиков больше 25, а девочек – меньше. Заметим, что, очевидно, в группе с номерами от 51 до 100 должно быть наоборот: мальчиков меньше 25, а девочек – больше. Рассмотрим группу с номерами от 2 до 51. Количество мальчиков может измениться на 1 или не измениться вообще.

Итак, при переходе последовательно от группы к группе количество мальчиков меняется не более чем на 1 и от числа, большего 25, приходит к числу, меньшему 25. Поэтому где-то «по дороге» оно равнялось 25, что и требовалось.

Ситуация, когда в первой группе мальчиков меньше, рассматривается аналогично.

9. Нет, неверно.

Рассмотрим треугольник со стороной длины 1500 и площади 1. Разрезав его на 1000 частей, хотя бы в одной из них мы получим две точки, удаленные на 1,5 (лежащие на указанной стороне). Но в квадрате площади 1 расстояние между наиболее удаленными точками равно длине диагонали  $\sqrt{2}$ , которая меньше 1,5.

10. Верно.

Выберем произвольно 101 число из данных двухсот. Разделим каждое из них на наибольшую содержащуюся в нем в качестве множителя степень двойки. Получим 101 нечетное число. Но среди чисел от 1 до 200 имеется только 100 нечетных чисел, поэтому среди полученных нечетных чисел имеются хотя бы два совпадающих. Посмотрим, какое из них подверглось сокращению на большую степень двойки – именно оно (до сокращения), очевидно, делится на второе (также до сокращения). Поскольку все исходные 200 чисел различны, совпадение отобранных чисел исключается.

## ФИЗИКА

1. Если лучи солнца направлены навстречу броску (бросок против солнца) и угол  $\beta$  больше или равен углу  $\alpha$ , в который начальная скорость камня составляет с горизонтом, то максимальное расстояние тени тела от точки бросания равно дальности полета. При броске по солнечным лучам и условию, что угол  $\beta$  меньше угла  $\alpha$ , дальность определяется касательным лучом солнца к траектории полета камня.

2. Перегородка сместится влево на 14 см.

3.  $R = 20$  Ом;  $N = 5$ .      4.  $l = \frac{v\mu T}{v+u} = 4$  м.

5. Очевидно, ложка была сделана из сплава с низкой температурой плавления. Это мог быть, например, сплав Вуда, изобретенный в 1860 году английским инженером Барнабасом Вудом. Его температура плавления 68,5 °С. Из-за происхож-

дения фамилии Вуд от английского wood – лес, древесина, переводчики иногда называют сплав «деревянным металлом».

6.  $t_1 = 72$  мин.      7.  $a = \frac{g}{2} \approx 5 \text{ м/с}^2$ .

8.  $\Gamma = \frac{5}{3}$  (изображение предмета мнимое).

9. Нижние слои воды тормозятся о поднимающееся дно, в то время как верхние слои воды по инерции бегут с прежней скоростью. Это приводит к поднятию уровня верхних слоев воды, а за счет большей скорости этого слоя происходит обгон нижних слоев и их срыв, в результате чего и образуются «барашки»

10. Пластинки являются поляроидами, превращающими естественный свет в плоско поляризованный. Кусочки липкой ленты представляют собой анизотропную среду и, как следствие, обладают двойным лучепреломлением. Тогда в скрещенных поляроидах наблюдается интерференция поляризованных лучей. При вращении одного из поляроидов условия интерференции меняются, что приводит к изменению цвета проходящей световой волны. Тот факт, что часть экрана монитора гаснет при вращении поляроида, указывает на то, что свет, идущий от экрана, плоско поляризован.

*Письменный индивидуальный тур*

**МАТЕМАТИКА**

1. Нет, не могут.

Если два натуральных числа имеют одинаковые суммы цифр, то они должны давать одинаковые остатки при делении на 3, а тогда их разность должна делиться на 3. Но

$$(N + 1)^2 - (N^2 - N) = 3N + 1$$

– не делится на 3.

2. а) Можно; б) нельзя.

а) Поскольку площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, сумма площадей 20 данных треугольников равна 20, поэтому сторона искомого квадрата должна равняться  $2\sqrt{5}$  – удвоенной гипотенузе данного треугольника. Один из (многих!) способов решения приведен на рисунке 10.

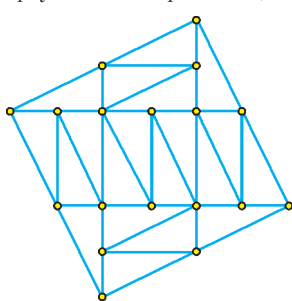


Рис. 10

б) В этом случае сторона искомого квадрата должна быть равна  $2\sqrt{10}$ . Предположим, что квадрат удалось сложить. Тогда на его стороне может быть сколько-то катетов длины 1, сколько-то катетов длины 2 и сколько-то гипотенуз длины  $\sqrt{5}$ , причем без гипотенуз не обойтись, поскольку длины катетов рациональны, а сторона квадрата – иррациональна. (Также не обойтись без катетов, так как невозможно представить отрезок длины  $2\sqrt{10}$  каким-либо количеством отрезков длины  $\sqrt{5}$ .) Получается равенство  $p + q\sqrt{5} = 2\sqrt{10}$ , где  $p$  – сумма длин катетов, лежащих на какой-то стороне квадрата, а  $q$  – количество гипотенуз, лежащих на ней. Возведя это равенство в квадрат, получим

$$p^2 + 5q^2 + 2pq\sqrt{5} = 40,$$

что невозможно, так как слева стоит иррациональное число, а справа – рациональное.

3. 1.

Заметим, прежде всего, что  $\alpha$  – положительное число. Действительно, если  $-1 \leq \alpha < 0$ , то в данном уравнении

$$\alpha^3 = \alpha + 1 \tag{1}$$

левая часть отрицательна, а правая – неотрицательна, поэтому на этом промежутке уравнение не имеет решений. Если же

$\alpha < -1$ , то данное уравнение можно переписать в виде

$$\alpha(\alpha^2 - 1) = 1, \tag{1a}$$

и его левая часть становится отрицательной, а правая – положительной.

Преобразуем теперь подкоренное выражение. Умножив обе части уравнения (1) на положительное число  $\alpha$ , найдем, что

$$\alpha^4 = \alpha^2 + \alpha, \tag{2}$$

поэтому

$$2\alpha^2 + 3\alpha + 2 = (\alpha^2 + \alpha) + (\alpha^2 + 2\alpha + 2) = \alpha^4 + \alpha^2 + 2(\alpha + 1).$$

Заменим сумму в последней скобке на левую часть уравнения (1). Теперь с помощью уравнения (2) получим, что подкоренное выражение равно

$$\alpha^4 + 2\alpha^3 + \alpha^2 = (\alpha(\alpha + 1))^2 = (\alpha^2 + \alpha)^2 = \alpha^8.$$

Осталось заметить, что из уравнения (1a) вытекает

$$\alpha^2 - 1 = \frac{1}{\alpha},$$

что и приводит к указанному ответу.

4. За  $\frac{2}{3}$  часа, т.е. за 40 минут.

Пусть все четверо работают непрерывно следующим образом. Сначала над одной канавой работает только первый землекоп, а в это время все остальные роют вторую такую же канаву. По условию, к моменту когда первый закончил свою часть работы над первой канавой, остальные выкопали половину такой же второй. Далее, пусть второй землекоп начал работать над первой канавой, а первый перешел ко второй и присоединился к оставшимся там третьему и четвертому, чтобы продолжить работу над второй канавой. Тогда, по условию, к моменту когда второй закончил свою часть работы над первой канавой, остальные трое закончили копать вторую канаву. Пусть теперь третий землекоп начинает свою часть работы над первой канавой, а все остальные начинают рыть третью такую же канаву. К моменту когда третий закончил работать над первой канавой, остальные выкопали половину третьей такой же канавы. Наконец, пусть четвертый приступает к работе над первой канавой, а остальные – над третьей. По условию, когда четвертый закончил копать первую канаву, остальные закончили копать третью. Таким образом получаем ответ.

5.  $n$ .

Найдем наименьшее число в таблице (оно, очевидно, существует). Его, конечно, отметили дважды: и в столбце, и в строке. Если вычеркнуть теперь строку и столбец, на пересечении которых стоит это наименьшее число, то полученная таблица размером  $(n - 1) \times (n - 1)$  будет удовлетворять всем условиям задачи. Теперь найдем наименьшее число в новой, меньшей таблице, оно также будет отмечено, и вычеркнем строку и столбец, на пересечении которых стоит наименьшее число, и т.д. В итоге мы за  $n$  шагов вычеркнем все отмеченные числа и исчерпаем всю таблицу.

6. 1:1:1.

Пусть сначала отрезок  $KL$  при переходе от  $K$  к  $L$  пересекает диагональ  $AC$ , а затем – вторую диагональ трапеции. Для решения задачи нам будут полезны два утверждения (обозначения – из условия задачи).

1. Длины перпендикуляров  $BE$  и  $DF$  (рис. 11), опущенных из концов  $B$  и  $D$  диагонали  $BD$  трапеции  $ABCD$  на боковые стороны  $CD$  и  $AB$  соответственно, относятся как основания тра-

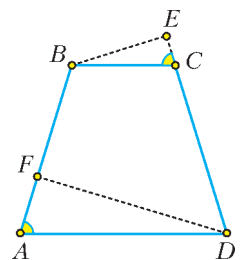


Рис. 11

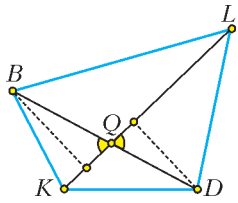


Рис. 12

пещи. Это следует из подобия прямоугольных треугольников  $BEC$  и  $ADF$  (углы  $BCE$  и  $DAF$ ).

2. В четырехугольнике  $KBLD$  (рис. 12) площади треугольников  $BLK$  и  $LKD$  относятся как отрезки  $BQ$  и  $QD$  диагонали  $BD$ . Это становится очевидным, если провести высоты указанных треугольников из концов диагонали  $BD$  и заметить, что отношение указанных площадей равно отношению проведенных высот (основание  $KL$  треугольников – общее), а отрезки диагонали равны этим высотам, деленным на синусы одинаковых (вертикальных) углов с вершиной в точке  $Q$ .

Теперь применим утверждения 1 и 2 к площадям треугольников  $BLD$  и  $BKD$  (рис. 13). Согласно первому из них, эти

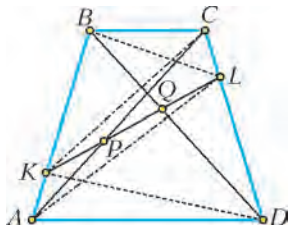


Рис. 13

площади относятся как 1:2 (так как основания  $LD$  и  $BK$  равны, а соответствующие высоты относятся как 1:2), а согласно второму,  $KQ : QL = 2 : 1$ , т.е.

$QL = \frac{1}{3}KL$ . Применяв те же рассуждения к треугольникам  $AKC$  и  $ALC$ , аналогично найдем, что  $KP = \frac{1}{3}KL$ . Значит,

$$KP : PQ : QL = 1 : 1 : 1.$$

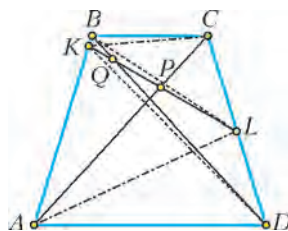


Рис. 14

Если предположить, что отрезок  $KL$  сначала пересекает диагональ  $BD$  (условный рис. 14), то, рассуждая аналогично (точки на отрезке  $KL$  идут в порядке  $K, Q, P, L$ ), получим, что  $KQ = 2QL$  и одновременно  $PL = 2KP$ , или  $KL = 3QL$  и  $KL = 3PL$ , что, конечно, невозможно, поскольку  $QL > PL$ .

7. Существует:  $x_{262} = 0$ .

Условие задачи можно переписать так:

$$x_{n+2} \cdot x_{n+1} - x_n \cdot x_{n+1} = -1. \quad (*)$$

Пусть  $a_n = x_n \cdot x_{n+1}$ . Тогда  $a_1 = 260$ , а условие  $(*)$  можно переписать так:  $a_{n+1} - a_n = -1$ , откуда следует, что  $\{a_n\}$  – арифметическая прогрессия с первым членом 260 и разностью, равной  $-1$ . Поэтому  $a_n = a_1 + d(n-1) = 261 - n$ . Очевидно, что  $a_{262} = 0$ , т.е.  $x_{261} \cdot x_{262} = 0$ , поэтому  $x_{261} \neq 0$ ,  $x_{262} = 0$ .

**ФИЗИКА**

1.  $L = 113$  м. 2.  $l_0 = l + v_0 \sqrt{\frac{M}{k} \left( \frac{M}{m} + 1 \right)} = 0,3$  м.
3.  $q = R \sqrt{14\pi\epsilon_0 mg} = 1,4$  мкКл. 4.  $T = \sqrt{\frac{a_0(L^2 + l^2)}{gl}} = 2,04$  с.
5. От песчаного дна брусок оторваться не сможет, и бакен утонет. В случае каменистого дна бакен будет плавать так, что над водой будет находиться только его верхушка, составляющая 4,2% всего объема бакена.
6.  $m = 2,9$  кг;  $p_a = 772$  мм рт.ст. 7.  $D_n = \frac{D}{D + n(1 - D)} = 0,51$ .

История научных идей и открытий

**МАТЕМАТИКА**

1. а) Бесконечно; б) бесконечно.
- а) Покажем, что любое число вида  $3 \cdot 2^n$  при  $n > 1$  избыточно. Действительно, найдем сумму всех его делителей:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 3 \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = 2^{n+1} - 1 + 3 \cdot (2^n - 1) = 5 \cdot 2^n - 4 > 3 \cdot 2^n.$$

Поскольку чисел вида  $3 \cdot 2^n$  бесконечно много, получаем ответ.

б) Пусть  $p$  – простое число. Тогда его единственный собственный делитель – число 1. Поскольку  $p > 1$ , любое простое число недостаточно, а простых чисел, как известно, бесконечно много.

2. Подберем целые числа  $x$  и  $y$  так, чтобы выполнялось равенство  $x^2 - y^2 = z^3$ , где  $z$  – произвольное натуральное число. Это равенство равносильно равенству  $(x - y)(x + y) = z \cdot z^2$ , которое будет выполняться для решений  $(x; y)$  системы уравнений

$$\begin{cases} x - y = z, \\ x + y = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z^2 + z}{2}, \\ y = \frac{z^2 - z}{2}. \end{cases}$$

Заметим, что оба числителя  $z(z + 1)$  и  $z(z - 1)$  – четные числа (как произведение двух последовательных целых чисел), поэтому найденные решения системы – целые числа.

3. а) 0, (027); б)  $\frac{467}{1850}$ .

а) Делим числитель на знаменатель, например, «уголком».

б) Преобразуем:  $0,25(243) = \frac{1}{4} + \frac{1}{100}\alpha$ , где  $\alpha = 0, (243)$ .

Заметим, что  $1000\alpha = 243 + \alpha$ , откуда  $\alpha = \frac{243}{999} = \frac{9}{37}$ . И окон-

чательно получим  $0,25(243) = \frac{1}{4} + \frac{9}{3700} = \frac{934}{3700} = \frac{467}{1850}$ .

4. В связи с возникновением неевклидовой геометрии Гаусс проверял справедливость евклидовой теоремы о сумме углов треугольника.

5. Три партии из четырех.

Если в серии из  $n$  одинаковых опытов событие  $A$  может в каждом опыте произойти с вероятностью  $p$  и не произойти с вероятностью  $q$  (естественно,  $p + q = 1$ ), то вероятность того, что в этой серии событие  $A$  произойдет ровно  $k$  раз, равна  $C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$  (формула Бернулли), где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . В нашей задаче  $p = q = \frac{1}{2}$ .

В случае  $n = 4$  у нас  $k = 3$ , поэтому искомая вероятность равна

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

При  $n = 8$  и  $k = 5$  получаем, что искомая вероятность равна

$$C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{1}{256} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{256} = \frac{7}{32} < \frac{1}{4}.$$

**ФИЗИКА**

1. а) Большой адронный коллайдер. б) На территории Швейцарии и Франции. в) На 14 ТэВ. г) Прежде всего, обнаружение бозона Хиггса.
2. а) Хейке Камерлинг-Оннес. б) Нидерланды.
3. а) Молекулярно-кинетическая теория утверждает, что вещество состоит из молекул, находящихся в непрерывном движении и взаимодействии. б) Даны определения атома и молекулы.
4. Атомный силовой микроскоп.
5. а) Ричард Фейнман. а) Он – один из создателей современной квантовой электродинамики (Нобелевская премия по физике 1965 года). Один из авторов известного курса «Фейнмановские лекции по физике».



**II МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5-8  
КЛАССОВ**

5-6 классы

Устный командный тур

1. 54.

Площади треугольников  $ADK$  и  $CDL$  равны  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 144\right) = 36$ ,

площадь треугольника  $BKL$  равна  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 144\right) = 18$ , поэтому

площадь треугольника  $DKL$  равна  $144 - (36 + 36 + 18) = 54$ .

2. Нечетным.

Сгруппируем слагаемые указанной суммы (кроме последнего) по парам:  $S = (1 + 2) + (3 + 4) + (2011 + 2012) + 2013$ . Сумма чисел каждой пары нечетна, количество пар четно, следовательно, сумма чисел от 1 до 2012 четна.

3. 6000.

Все четырехзначные числа разобьем на тройки: 1000, 1001, 1002; 1003, 1004, 1005; ...; 9997, 9998, 9999. Всего таких троек 3000, первые два числа в каждой тройке не делятся на 3.

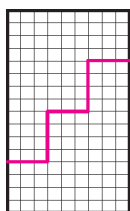


Рис. 15

4. См. рис. 15.

5. Одна из возможных записей:

$$9 \cdot (8 - 7) \cdot (6 - 5) \cdot (4 - 3) \cdot (2 - 1) + 0.$$

6. Возьмем два последовательных числа  $a$  и  $b$ , которые не попали на соседние грани, и расположим куб так, что одно из этих чисел окажется на нижней грани. Тогда другое число окажется на верхней грани. Либо у числа  $a$ , либо у числа  $b$  среди чисел от 1 до 6 найдутся два соседних числа. Если, для определенности, два соседних нашлись у числа  $a$ , то одно из них  $b$ , а другое  $c$ , лежащее на боковой грани. В результате,  $a$  и  $c$  — два соседних числа, расположенных на соседних (смежных) гранях куба.

Письменный индивидуальный тур

1. 24,5 см.

В прямоугольнике есть смежные и параллельные стороны. Из трех сторон прямоугольника две обязательно смежные, следовательно, сумма трех каких-то сторон больше, чем сумма двух смежных. Таким образом, 19 см — сумма двух параллельных сторон, одна параллельная сторона имеет длину 9,5 см. Ясно, что сумма длин трех сторон, о которых идет речь в условии, это сумма длин найденной нами стороны в 9,5 см и длин двух других параллельных сторон. Следовательно, периметр прямоугольника равен  $19 + 5,5 = 24,5$  (см).

2. Больше времени потребуется весной.

Пусть  $S$  — расстояние от  $A$  до  $B$ . Тогда весной на дорогу катеру потребуется время  $\frac{S}{16+2} + \frac{S}{16-2} = \frac{32}{16^2-2^2} \cdot S$ , а летом —  $\frac{S}{16+1} + \frac{S}{16-1} = \frac{32}{16^2-1^2} \cdot S$ . Ясно, что  $16^2 - 2^2 < 16^2 - 1^2$ , поэтому весной потребуется больше времени.

3. Не является.

Квадрат натурального числа либо делится на 3, либо дает при делении на 3 остаток 1 (докажите). Число  $\frac{11 \dots 19}{2012}$  можно записать в виде суммы  $\frac{11 \dots 1}{2013} + 8$ . По признаку делимости первое слагаемое делится на 3, а второе слагаемое при делении на 3 дает остаток 2.

4. 1007.

Представим сумму в виде  $(2013 - 2012) + (2011 - 2010) + \dots + (5 - 4) + (3 - 2) + 1$ , где каждая из 1006 разностей равна 1.

5. На  $3^{48}$ .

Среди чисел от 1 до 100 на 3 делятся 33 числа. Кроме того, одиннадцать из них делятся на 9, значит, нужно добавить еще 11 троек. На 27 делятся еще 3 числа, на 81 — одно число. Итого:  $33 + 11 + 3 + 1 = 48$ .

6. См. рис. 16.

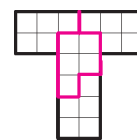


Рис. 16

7-8 класс

Устный командный тур

1. 15.

Соединим середину  $H$  стороны  $AB$  с вершиной  $D$  и обозначим через  $G$  точку пересечения  $DH$  с диагональю  $AC$  (рис. 17).

Прямая  $HD$  параллельна прямой  $BE$ , поэтому  $HG$  — средняя линия треугольника  $ABF$ , и  $AG = GF$ . Аналогично,  $EF$  — средняя линия треугольника  $CDG$ , и  $GF = FC$ .

Таким образом, точки  $G$  и  $F$  делят диагональ  $AC$  на три равные части.

Так как  $AF = \frac{2}{3} AC$ ,  $S_{ABF} = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 36 = 12$ . Площадь треугольника  $BCE$  равна четверти площади квадрата  $ABCD$ ,  $S_{BCE} = \frac{1}{4} \cdot 36 = 9$ , поэтому площадь четырехугольника  $ADEF$  равна  $36 - (12 + 9) = 15$ .

2. 4.

Модуль разности  $|x - a|$  равен расстоянию от точки числовой прямой, изображающей число  $x$ , до точки, изображающей число  $a$ . Для любой точки  $x$  отрезка  $[-4; -1]$  сумма  $|x + 4| + |x + 1|$  равна сумме расстояний от точки  $x$  до точек  $-4$  и  $-1$  и равно 3 — длине этого отрезка. Для точек  $x$  вне отрезка  $[-4; -1]$  сумма  $|x + 4| + |x + 1| > 3$ . Для любой точки  $x$  отрезка  $[-3; -2]$ , лежащего в отрезке  $[-4; -1]$ , сумма  $|x + 3| + |x + 2|$  равна 1 — длине отрезка  $[-3; -2]$ . Для точек  $x$  вне отрезка  $[-3; -2]$  сумма  $|x + 3| + |x + 2| > 1$ . Таким образом, наименьшее значение суммы равно 4 и достигается для всех  $x$  из отрезка  $[-3; -2]$ .

3. Троек на две больше.

Если количество троек совпало бы с количеством пятерок, то сумма всех оценок равнялась бы 272. Замена «5» на «3» уменьшает сумму на 2.

4. Через точку  $O$  пересечения диагонали  $AC$  и отрезка  $MN$  параллельно  $CD$  проведем отрезок, точку пересечения которого с отрезком  $PN$  обозначим через  $K$  (рис. 18). В треугольнике  $QPC$  отрезки  $MO$  и  $QC$  параллельны, следовательно,  $MP : MQ = PO : OC$ . В треугольнике  $CPN$  отрезок  $OK$  параллелен  $CN$ , следовательно,  $PK : KN = PO : OC$ . Таким образом,  $MP : MQ = PK : KN$ . В треугольнике  $PQN$  отрезки  $MK$  и  $QN$  параллельны, следовательно,  $\angle KMN = \angle MNQ$ . Прямоугольные треугольники  $МОК$  и  $НОК$  равны, так как  $МО = ON$  и  $OK$  — общий катет, поэтому  $\angle KMN = \angle MNP$ .

5.  $27 - 2\sqrt{2}$ .

Должны выполняться условия  $(a + b\sqrt{2})^2 = 737 - 108\sqrt{2}$ ,  $a + b\sqrt{2} > 0$ , т.е.  $2ab = -108$ ,  $a^2 + 2b^2 = 737 \Rightarrow ab = -2 \cdot 3^3$ , но  $a$  не может быть четным числом, поэтому нужно рассмотреть четыре случая: 1)  $a = 1$ ,  $b = -54$ ; 2)  $a = -1$ ,  $b = 54$ ; 3)  $a = 27$ ,  $b = -2$ ; 4)  $a = -27$ ,  $b = 2$ .

6. Выберем кучку, где наименьшее число орехов. Пусть она

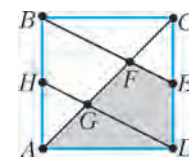


Рис. 17

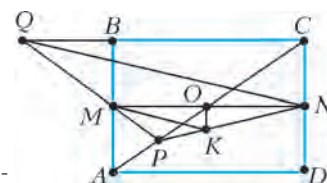


Рис. 18

18-я. В первые 6 групп по три кучки добавим по одному ореху и в группу из 18-й, 19-й, 20-й кучек тоже добавим по одному. Разница между наибольшим и наименьшим числом орехов в кучках уменьшилась на 1.

*Письменный индивидуальный тур*

**1. 3.**

При делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы его цифр. Остатки от деления девяти последовательных натуральных чисел равны 1, 2, 3, ..., 0, их сумма равна 36 и делится на 9, поэтому сумма цифр чисел от 1 до 2007 делится на 9 без остатка. Сумма цифр чисел от 2008 до 2013 при делении на 9 дает тот же остаток, что и число  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ , т.е. 3.

**2.** Вспомним, что  $|x - a|$  равен расстоянию от точки числовой прямой, изображающей число  $x$ , до точки, изображающей число  $a$ . Поэтому число  $|x - 3| + |x + 3|$  равно сумме расстояний от точки  $x$  до точек  $-3$  и  $3$ . Но расстояние между точками  $-3$  и  $3$  равно 6. Уравнению а) удовлетворяют только числа из отрезка  $[-3; 3]$ . Для других чисел  $|x - 3| + |x + 3| > 6$ . В уравнении б) к левой части добавляется расстояние от точки  $x$  до точки 0, поэтому  $x = 0$ .

**3.** Известно, что  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ . Поэтому

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48},$$

отсюда

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{144}.$$

Возможны и другие подходы к решению задачи, соответственно, с другими ответами.

**4.** Можно записать  $c = -(a + b)$ , подставить в заданное равенство и показать, что получается тождество.

**5.**  $\frac{13}{49}$ .

Разделив каждую из сторон треугольника  $ABC$  на семь равных частей, разрежем треугольник на маленькие параллелограммы и треугольники, каждый из которых составляет половину параллелограмма (рис. 19). Площадь треугольника  $AKM$  равна  $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot s$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot s$ , где  $s$  — площадь маленького параллелограмма.

Таким образом, площадь треугольника  $AKM$  составляет  $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}$  от площади треугольника  $ABC$ . Такую же часть от площади треугольника  $ABC$  составляют и площадь треугольника  $BMN$ , и площадь треугольника  $CKN$ , поэтому на площадь треугольника  $MNK$  приходится

$1 - \left( \frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{12}{49} \right) = \frac{13}{49}$  от площади исходного треугольника.

**6.** Из каждой вершины шестиугольника выходят пять отрезков, по крайней мере три из них окрашены в один цвет. Пусть, для определенности, из вершины  $A$  выходят три зеленых отрезка, вторыми концами которых являются вершины  $B, C, D$ . Если вершины  $B, C$  и  $D$  соединены красными отрезками, то все стороны треугольника  $BCD$  окрашены в один цвет (красный), если же две из этих трех вершин, например  $B$  и  $C$ , соединены зелеными отрезками, то в один цвет (зеленый) окрашены все стороны треугольника  $ABC$ .

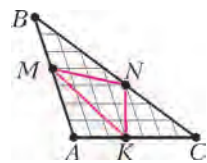


Рис. 19

**ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
ПО ФИЗИКЕ 2014 ГОДА**

МОСКОВСКИЙ ТУР

**1.**  $L_{\max} = l \frac{u}{v} e^{v/u-1}$ . **2.**  $L = v_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}}$ , если санки до остановки не заехали полностью на асфальт, и  $L = \frac{v_0^2 + \mu g l}{2\mu g}$  — в противном случае.

**3.**  $\omega_0 = \frac{5 L^2}{2 r^2} \sqrt{\frac{g R_3^2}{R^3}} \sin \alpha$ , где  $R_3$  — радиус Земли.

**4.**  $A = Sh \left( p_0 \ln \left( 1 + \frac{Mg}{p_0 S} \right) + \frac{Mg}{S} \right)$ , где  $p_0$  — атмосферное давление.

**5.**  $F = \frac{qQ}{8\epsilon_0 RL}$ . **6.**  $\Phi = \frac{\pi R^2 \mu_0 n I}{2}$ .

**7.** Годограф представляет собой окружность:

$$\left( \frac{S_x}{E_0 B_0} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{S_y}{E_0 B_0} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ТУР

**1.** Это парабола:  $(y + x)^2 = \frac{2\sqrt{2}v^2}{\mu g} x$ . **2.**  $v = \sqrt{\frac{3ga}{10}}$ .

**3.**  $m_{i+1} = \frac{im_i}{i+2}$ . **4.**  $T = 2\pi \sqrt{\frac{2\bar{a}^2 + 2\bar{b}^2 + \bar{a}\bar{b}}{3g(\bar{a} + \bar{b})^2}}$ .

**5.**  $T = T_0 - \frac{2Mg}{7R}$ , где  $M$  — молярная масса воздуха,  $R$  — универсальная газовая постоянная.

**6.**  $F = \frac{\sigma^2 l^2}{2\epsilon_0}$ . **7.**  $r_{\min} = \sqrt{\frac{ga}{mv}}$ .

**8.** При  $v_x = \frac{q^2 B E_0}{m^2 \omega^2 - q^2 B^2}$ ;  $v_z = 0$ ; эллипс.

# КВАНТ

**НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ**

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

**НОМЕР ОФОРМИЛИ**

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, М.В.Сумнина**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА**

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ  
по печати. Рег. св-во №0110473**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

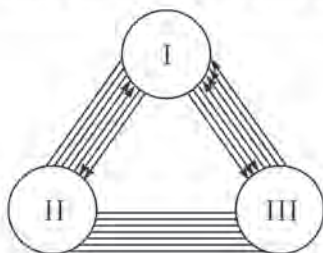
**Тел.: (495) 930-56-48**

**E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными материалами  
в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь  
www.Pareto-print.ru**

## ШАХМАТЫ БЕЗ ШАХМАТ



В «Кванте» неоднократно рассказывалось о различных математических задачах и головоломках с участием шахматной доски и фигур. Но, оказывается, немало математических нюансов существует и в шахматах... без шахмат. Речь идет о необычных задачах, возникающих при анализе закономерностей шахматных соревнований – в матчах и турнирах. Некоторые из них совсем простые, задачи-шутки, другие посложнее.

1. Докажите, что если все игроки набрали в турнире разное число очков и при этом нет ничьих, то занявший первое место обыграл всех, занявший второе – всех, кроме первого, и т.д.

*Решение.* Если в турнире  $n$  участников и не было ничьих, то они набрали от 0 до  $n - 1$  очка. Очевидно, если у игрока  $n - 1$  очко, то он выиграл у всех и стал первым. Если игрок имеет  $n - 2$  очка, то он выиграл у всех, кроме первого, и т.д.

2. Может ли шахматист-любитель набрать очко, встречаясь с двумя чемпионами мира Каспаровым и Крамником, играя одну партию белыми и другую черными?

*Решение.* Легко. Это известный юмористический парадокс. Для достижения цели любителю надо первый ход белых, например, Каспарова, сделать против Крамника. Ответ Крамника черными воспроизвести против Каспарова, ход того белыми опять повторить против Крамника и т.д. Если один из гроссмейстеров очередным ходом объявит мат, то точно так же наш шахматист поставит мат в другой партии, и очко завоевано. Ничейный исход в обеих встречах (например, пат) также его устраивает.

3. Трое провели за доской целый день, причем каждая пара сыграла друг с другом одинаковое число партий – получился многокруговой турнир. Стали думать, кто выступил лучше всех. Первый сказал: «У меня больше всех побед». Второй возразил: «А у меня меньше всех поражений». При этом оказалось, что третий набрал больше всех очков. Возможно ли такое?

*Решение.* Ситуация выглядит неправдоподобной, но ответ положительный. Таблицу составить несложно, а еще проще нарисовать граф (см. рисунок). Здесь каждые два игрока провели по семь партий. Первый у второго две выиграл и столько же проиграл. С третьим он три выиграл и четыре проиграл. Все остальные встречи закончились вничью. Итак, у первого больше

всех побед – 5 и 6,5 очков. У второго меньше всех поражений – 2 и 7 очков, у третьего 4 победы и 3 поражения, но больше всех очков – 7,5, он и вышел победителем.

4. В турнире играли  $n$  гроссмейстеров и мастеров, и каждый набрал половину своих очков, играя с мастерами. Докажите, что  $n$  – квадрат целого числа.

*Решение.* Пусть  $a$  – число мастеров, а  $b$  – гроссмейстеров. Мастера разыграли между собой  $\frac{a(a-1)}{2}$  очков, а так как это половина их очков, столько же они набрали и с гроссмейстерами. Аналогично, гроссмейстеры, как между собой, так и с мастерами, набрали  $\frac{b(b-1)}{2}$  очков. Значит, мастера и гроссмейстеры друг с другом набрали  $\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2}$  очков. С другой стороны, число партий между старшими и младшими по званию равно  $ab$ , столько очков между ними и разыгрывается. Итак,  $\frac{a(a-1)}{2} + \frac{b(b-1)}{2} = ab$ , или, после упрощений,  $a + b = (a - b)^2$ . Так как  $n = a + b$ , то  $n$  – квадрат целого числа.

5. В Москве гроссмейстеров намного больше, чем на всей остальной территории страны. Российская шахматная федерация по случаю своего юбилея решила провести турнир с участием всех обладателей высшего звания, причем в городе, для которого общее расстояние переезда гроссмейстеров будет наименьшим. Москвичи утверждают, что этому условию удовлетворяет столица, а вот петербуржцы настаивают на том, чтобы проводить соревнования в городе, находящемся в «центре тяжести» всех игроков. Где на самом деле должен состояться турнир?

*Решение.* Обозначим московских гроссмейстеров  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , а остальных  $O_1, O_2, \dots, O_t$ . Так как в Москве находится больше половины участников,  $k > t$ . Если рассмотреть пары игроков  $(N_1, O_1), (N_2, O_2), \dots, (N_t, O_t)$ , то гроссмейстеры-москвичи  $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_k$  не попадут ни в одну из пар.

Возьмем теперь первую пару  $(N_1, O_1)$ . При любом выборе места игры эти двое

проедут расстояние не меньше чем  $N_1 O_1$  по прямой, соединяющей их города. А все вместе проедут не меньше чем

$$S = N_1 O_1 + N_2 O_2 + \dots + N_t O_t.$$

Если турнир состоится в Москве, то  $S$  и будет суммой расстояний (остальные гроссмейстеры уже на месте). А если он пройдет в другом городе, то  $t$  пар игроков проедут не меньше  $S$ , а сумма расстояний для игроков  $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_k$  только увеличит общую сумму. Следовательно, москвичи правы – их город наилучшее место для проведения юбилейного турнира.

6. Квалификационный турнир юношей собрал 30 человек. Первый разряд присваивался всем, кто набрал не меньше 60% максимально возможного количества очков. Какому наибольшему числу игроков мог быть присвоен разряд?

*Решение.* В каждой партии игроки набирают 1 очко, поэтому всего было набрано  $15 \times 29 = 435$  очков. Каждый участник, получивший разряд, набрал не менее  $0,6 \cdot 29 = 17,4$  очка, точнее, не меньше 17,5 очка. Поэтому выполнивших норму не больше чем  $\frac{435}{17,5} < 25$  человек. Получить разряд могли ровно 24 участника, если сыграли между собой все партии вничью, а у остальных все партии выиграла – у каждого из них тогда будет по 17,5 очка.

7. Назовем участника турнира странным, если он выиграл у всех, кто набрал больше очков, чем он, и проиграл всем, кто набрал меньше очков, чем он. С теми, кто набрал столько же очков, странный игрок мог сыграть как угодно. Докажите, что у всех странных участников одинаковое число очков.

*Решение.* Предположим, что Таль и Каспаров – странные игроки в данном турнире, Михаил проиграл Гарри, но обошел его по очкам. (Они действительно иногда бывали «странными». Например, Таль обычно проигрывал Корчному, но обгонял его, а Каспаров опережал французского гроссмейстера Лотье, но имел против него отрицательный счет.) Очевидно, с каким-то третьим игроком (и не с одним) Таль сыграл лучше, чем с Каспаровым, скажем с Карповым (иначе Таль не мог бы обогнать Каспарова). Если у Карпова меньше очков, чем у Таля, то Карпов выиграл у него (Михаил – странный игрок!). Если же у Карпова не меньше очков, чем у Таля, то Карпов набрал больше Каспарова, и тогда Каспаров (как странный игрок!) выиграл у Карпова. Значит, Таль ни с кем не сыграл лучше, чем Каспаров, что также противоречит предположению.

Е. Гук

# Уроки с физикой

## Как Архимед взвесил параболу?

Вычислить площадь сегмента параболы Архимеду помогло сформулированное им правило рычага...

# ARCHIMIDES



(Продолжение – на с.37 внутри журнала)